

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Lehrstuhl B für Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Alice Niemeyer

# Manipulation diskreter simplizialer Flächen

Bachelorarbeit

Reymond Oluwaseun Akpanya

Matrikelnummer: 357115

Vorgelegt am:	28.09.2018
Gutachter:	Prof. Dr. Alice Niemeyer
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Wilhelm Plesken
Betreuer:	Jesse Lansdown
Betreuer:	Markus Baumeister



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Wiederholung</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Konstruktion von simplizialen Flächen</b>	<b>6</b>
3.1	Randkantenpaare . . . . .	6
3.2	Mending-Map . . . . .	8
3.3	Mender- und Cutter-Operatoren . . . . .	11
3.4	Euler-Charakteristik . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Das wandernde Loch</b>	<b>17</b>
4.1	Prozedur $P^1$ . . . . .	20
4.2	Prozedur $P^2$ . . . . .	23
4.3	Prozedur $P^3$ . . . . .	24
4.4	Lochwanderungssequenzen . . . . .	28
4.5	Transitivität der Operation Wanderinghole . . . . .	29
4.6	Knotengrade . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Simpliziale Flächen mit 2- und 3-Waists</b>	<b>47</b>
5.1	2-Waists und 3-Waists . . . . .	47
5.2	Prozedur $W^2$ . . . . .	49
5.3	Prozedur $W^3$ . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Verallgemeinerte Konstruktionen</b>	<b>53</b>
6.1	Vereinigung Simplizialer Flächen . . . . .	53
6.2	Verallgemeinerung der Prozedur $W^3$ . . . . .	54
6.3	Verallgemeinerung der Prozedur $W^2$ . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>57</b>

# 1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Manipulation simplizialer Flächen zu untersuchen. Man versucht durch die Anwendung von gewissen Operationen aus einer simplizialen Fläche, bestehend aus Knoten, Kanten und Flächen, eine weitere simpliziale Fläche zu konstruieren. In dieser Arbeit werden nur diese behandelt, die die Kanten einer simplizialen Fläche verändern.

Zuerst wird jedoch im ersten Kapitel dieser Arbeit geklärt, was eine simpliziale Fläche überhaupt ist. Zusätzlich werden einige einführende Definitionen und Beispiele, die man dem Skript *Combinatorial Simplicial Surfaces* von Prof. Dr. Wilhelm Plesken entnehmen kann, angeführt, um ein grundlegendes Verständnis von simplizialen Flächen zu schaffen. Im zweiten Kapitel definiert man dann die oben schon erwähnten Operationen, welche die Kanten einer simplizialen Fläche manipulieren. Diese werden dann genutzt, um im darauf folgendem Kapitel eine Operation zu definieren, die Wanderinghole genannt wird. Die Untersuchung dieser Operation ist die Hauptfragestellung dieser Arbeit. Es wird hier Klarheit über Eigenschaften wie zum Beispiel Transitivität dieser Operation gebracht. Dies wird aber später noch näher erläutert. Abschließend wird eine simpliziale Fläche vergrößert. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Flächen und damit auch die der Kanten und Knoten vergrößert wird, um dann die Anwendung der Operation Wanderinghole auf diese zu untersuchen. Für die Untersuchung dieser Fragestellungen wurde das Computer-Algebra-System *Gap* zur Hilfe genommen und mithilfe dessen und dem Gap-Paket *SimplicialSurface* von Prof. Dr. Alice Niemeyer und Markus Baumeister zunächst einmal die Operation Wanderinghole implementiert, um so ein erstes Verständnis für diese zu bekommen und dann daraus folgend erste Behauptungen aufstellen zu können. Dies geschah unter der Betreuung von Prof. Dr. Alice Niemeyer, Markus Baumeister und Jesse Lansdown. Der Quellcode hierzu liegt im Anhang bei.

## 2 Wiederholung

Zunächst werden in den nächsten beiden Kapiteln einführende Definitionen und Zusammenhänge dargelegt, die man dem Skript *Combinatorial Simplicial Surfaces* entnehmen kann. Darüber hinaus stammen Sachverhalte und Konzepte nur dann aus dem im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen, falls dies an den dazugehörigen Stellen gekennzeichnet ist.

**Definition 2.1.** Sei  $X = X_0 \uplus X_1 \uplus X_2$  eine abzählbare Menge mit  $X_i \neq \emptyset$  für  $i = 0, 1, 2$  und  $<$  eine transitive Relation auf  $(X_0 \times X_1) \cup (X_1 \times X_2) \cup (X_0 \times X_2)$ . Man nennt  $X_0$  die Menge der Knoten,  $X_1$  die Menge der Kanten,  $X_2$  die Menge der Flächen und  $<$  Inzidenz einer simplizialen Fläche  $(X, <)$ , falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für jede Kante  $e \in X_1$  existieren genau zwei Knoten  $V_1, V_2 \in X_0$  mit  $V_1, V_2 < e$ .
2. Für jede Fläche  $F \in X_2$  gibt es genau drei Kanten  $e_1, e_2, e_3 \in X_1$  mit der Eigenschaft  $e_1, e_2, e_3 < F$ .
3. Für jede Kante  $e \in X_1$  gibt es entweder genau zwei Flächen  $F_1, F_2 \in X_2$  mit  $e < F_1, F_2$  oder genau eine Fläche  $F \in X_2$  mit  $e < F$ . Im ersten Fall sind  $F_1$  und  $F_2$  ( $e$ )-Nachbarn und  $e$  ist eine innere Kante, andernfalls ist  $e$  eine Randkante.
4. Für jeden Knoten  $V \in X_0$  existieren endlich viele Flächen  $F \in X_2$  mit  $V < F$ . Diese  $F_i \in X_2$  können in einem Tupel  $(F_1, \dots, F_n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  geordnet werden so, dass  $e_i < F_i$  und  $e_i < F_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, n-1$  ist, wobei  $e_i \in X_1$  eine Kante in  $X$  ist, für die  $V < e_i$  gilt. Das Tupel  $(F_1, \dots, F_n)$  wird auch Schirm genannt. Gibt es auch eine Kante  $e \in X_1$  mit  $e < F_1 F_n$ , so ist  $V$  ein innerer Knoten. Ist  $V$  kein innerer Knoten, so ist er ein Eckknoten.
5. Seien  $V \in X_0$  ein Knoten in  $X$  und  $(F_1, \dots, F_n)$  der zu  $V$  gehörige Schirm, wobei  $F_i \in X_2$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist. Dann ist  $n$  der Grad des Knotens  $V$ . Für den Grad eines Knotens  $V$  in  $X$  schreibt man  $\deg_X(V)$ . Falls  $X$  aus dem Kontext heraus klar ist, so schreibt man nur  $\deg(V)$  statt  $\deg_X(V)$ .
6. Die Menge aller inneren Knoten einer Kante  $e \in X_1$  bezeichnet man mit  $X_0^0(e)$ .

Es sei angemerkt, dass es für einen gegebenen Knoten einer simplizialen Fläche eine endliche Anzahl von Schirmen gibt. Diese sind jedoch alle äquivalent. Das heißt, sie können durch zyklische Permutationen umgeordnet werden.

Es ist außerdem möglich, die simpliziale Fläche  $(X, <)$  mit der Menge  $X$  zu identifizieren.

**Bemerkung 2.2.** Eine geschlossene simpliziale Fläche ist eine simpliziale Fläche, für die alle Kanten innere Kanten sind. Die Anzahl der Flächen einer geschlossenen simplizialen Fläche ist durch 2 teilbar, da

$$|X_2| = \frac{2|X_1|}{3}.$$

Die Anzahl der Kanten ist insbesondere durch 3 teilbar.

Im Folgendem werden nur endliche simpliziale Flächen betrachtet, das heißt simpliziale Flächen  $(X, <)$  mit  $|X| < \infty$ .

**Beispiel 2.3.** 1. Bis auf Isomorphie gibt es nur eine simpliziale Fläche bestehend aus einer Fläche, welche durch

$$\begin{aligned} X_0 &= \{V_1, V_2, V_3\}, X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}, X_2 = \{F_1\} \text{ und } x < y \Leftrightarrow \\ (x, y) &\in \{(e_1, F_1), (e_2, F_1), (e_3, F_1), (V_1, e_2), (V_1, e_3), (V_1, F_1), (V_2, e_1), (V_2, e_3), \\ &\quad (V_2, F_1), (V_3, e_1), (V_3, e_2), (V_3, F_1)\} \end{aligned}$$

beschrieben wird. Man nennt diese simpliziale Fläche Dreieck.

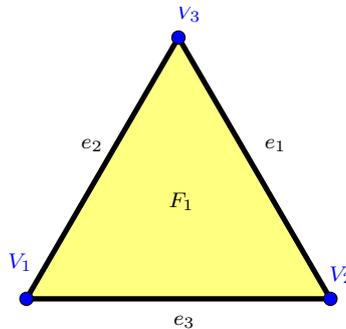


Abbildung 1: Dreieck

2. Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die  $n$ -fache Fläche  $n\Delta$  durch  $X = \{X_0, X_1, X_2\}$ , wobei

$$\begin{aligned} X_0 &= \{V_j^k \mid j = 1, 2, 3; k = 1, \dots, n\}, X_1 = \{e_j^k \mid j = 1, 2, 3; k = 1, \dots, n\}, \\ X_2 &= \{F_1, \dots, F_n\} \text{ und } x < y \Leftrightarrow \\ (x, y) &\in \{(e_1^k, F_k), (e_2^k, F_k), (e_3^k, F_k), (V_1^k, e_2^k), (V_1^k, e_3^k), (V_1^k, F_k), (V_2^k, e_1^k), \\ &\quad (V_2^k, e_3^k), (V_2^k, F_k), (V_3^k, e_1^k), (V_3^k, e_2^k), (V_3^k, F_k) \mid k = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

3. Der Janus-Kopf ist eine geschlossene simpliziale Fläche, die aus zwei Flächen besteht. Sie besitzt 3 innere Knoten und 3 innere Kanten und wird definiert durch

$$X_0 = \{V_1, V_2, V_3\}, X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}, X_2 = \{F_1, F_2\} \text{ und } x < y \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in \{(e_1, F_1), (e_1, F_2), (e_2, F_1), (e_2, F_2), (e_3, F_1), (e_3, F_2), (V_1, e_2), (V_1, e_3),$$

$$(V_1, F_1), (V_1, F_2), (V_2, e_1), (V_2, e_3), (V_2, F_1), (V_2, F_2), (V_3, e_1), (V_3, e_2),$$

$$(V_3, F_1), (V_3, F_2)\}.$$

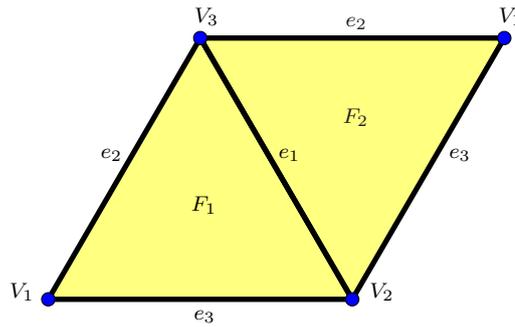


Abbildung 2: Janus-Kopf

4. Der Open-Bag ist eine simpliziale Fläche, die aus dem Janus-Kopf hervorgeht, wenn man die Kante  $e_2$  verdoppelt, das heißt sie wird beschrieben durch

$$X_0 = \{V_1, V_2, V_3\}, X_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, X_2 = \{F_1, F_2\} \text{ und } x < y \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in \{(e_1, F_1), (e_1, F_2), (e_2, F_1), (e_3, F_1), (e_3, F_2), (e_4, F_2), (V_1, e_2), (V_1, e_3),$$

$$(V_1, e_4), (V_1, F_1), (V_1, F_2), (V_2, e_1), (V_2, e_3), (V_2, F_1), (V_2, F_2), (V_3, e_1),$$

$$(V_3, e_2), (V_3, e_4), (V_3, F_1), (V_3, F_2)\}.$$

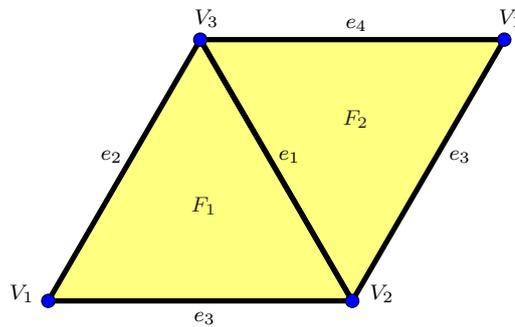


Abbildung 3: Open-Bag

**Definition 2.4.** Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche. Für  $i, j \in \{0, 1, 2\}$  mit  $i \neq j$  und  $x \in X_i$  definiert man die Menge  $X_j(x)$  als

$$X_j(x) := \{y \in X_j \mid x < y\}, \text{ falls } i < j$$

bzw.

$$X_j(x) := \{y \in X_i \mid y < x\}, \text{ falls } j < i.$$

Für  $S \subseteq X_i$  ist

$$X_j(S) := \bigcup_{x \in S} X_j(x).$$

**Bemerkung 2.5.** Für eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  können die Bedingungen in Definition 2.1 wie folgt umformuliert werden:

- $|X_0(e)| = 2$  für alle  $e \in X_1$ ,
- $|X_0(F)| = 3$  für alle  $F \in X_2$ ,
- $|X_1(F)| = 3$  für alle  $F \in X_2$ ,
- $1 \leq |X_2(e)| \leq 2$  für alle  $e \in X_1$ .

**Definition 2.6.** Seien  $(X, <)$  und  $(Y, \prec)$  simpliziale Flächen.

1. Man nennt eine bijektive Abbildung  $\alpha : X \rightarrow Y$  einen Isomorphismus, falls  $A < B$  in  $(X, <)$  genau dann gilt, wenn  $\alpha(A) \prec \alpha(B)$  in  $(Y, \prec)$  gilt. In diesem Fall schreibt man  $X \cong Y$ .
2. Eine surjektive Abbildung  $\alpha : X \rightarrow Y$  heißt Überdeckung, falls aus  $A < B$  in  $(X, <)$  folgt, dass  $\alpha(A) \prec \alpha(B)$  in  $(Y, \prec)$  gilt.

Es sei angemerkt, dass eine Überdeckung  $\alpha : X \rightarrow Y$  surjektive Abbildungen  $X_i \rightarrow Y_i$  und ein Isomorphismus  $\beta : X \rightarrow Y$  bijektive Abbildungen  $X_i \rightarrow Y_i$  für  $i = 0, 1, 2$  induziert.

Um simpliziale Flächen vollständig beschreiben zu können, führt man eine Notation ein. Man beachte, dass die hier eingeführte Notation stark von der Nummerierung der Knoten, Kanten und Flächen abhängt. Abgesehen davon ist sie eindeutig.

**Definition 2.7.** Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche, deren Knoten  $V_1, \dots, V_n$ , Kanten  $e_1, \dots, e_k$  und Flächen  $F_1, \dots, F_m$  ausgehend von ihrer Nummerierung linear geordnet sind. Das Symbol von  $(X, <)$  ist definiert durch

$$\mu((X, <)) := (n, k, m; (X_0(e_1), \dots, X_0(e_k)), (X_1(F_1), \dots, X_1(F_m))).$$

Man kann im Symbol die Knoten  $V_i$  durch  $i$ , die Kanten  $e_j$  durch  $j$  und die Flächen  $F_l$  durch  $l$  ersetzen und nennt dann das resultierende Symbol das ordinale Symbol  $\omega((X, <))$  von  $(X, <)$ .

Im nächsten Abschnitt werden zur Vereinfachung der Konstruktion von simplizialen Flächen Bilder eingeführt, die nur Ausschnitte einer simplizialen Fläche zeigen sollen. Durch das unten eingeführte Bild soll beispielsweise angedeutet werden, dass eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  betrachtet wird, wobei hier nur  $F \in X_2$ ,  $e_1, e_2, e_3 \in X_1$  und  $V_1, V_2, V_3 \in X_0$  mit

- $e_i < F$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,
- $V_i < e_j$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$  und
- $V_i < F$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$

von Bedeutung sind.

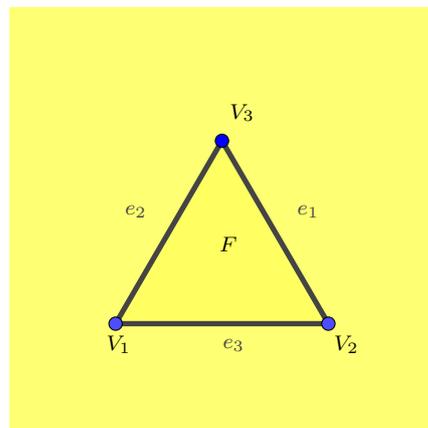


Abbildung 4: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Die Fläche  $X$  kann aber mehr Knoten, Kanten und Flächen beinhalten, was durch den gelben Hintergrund in Abbildung 4 angedeutet werden soll.

## 3 Konstruktion von simplizialen Flächen

### 3.1 Randkantenpaare

Zunächst werden Definitionen eingeführt, die den Zugang zu den unten definierten Operatoren erleichtern sollen.

**Definition 3.1.** Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche.

1. Sei  $e \in X_1$  eine innere Kante in  $(X, <)$ . Diese ist vom Typ  $i$  mit  $i \in \{0, 1, 2\}$ , falls  $|X_0^0(e)| = i$  gilt.
2. Man nennt  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar, falls  $e, f \in X_1$  Randkanten sind und  $e$  und  $f$  zu verschiedenen Flächen gehören. Das heißt

$$\forall F \in X_2 : \{e, f\} \not\subseteq X_1(F).$$

3. a) Man nennt  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar vom Typ 2, falls  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar ist und  $X_0(e) = X_0(f)$  gilt. Das Randkantenpaar ist mendable, falls  $|X_2(e)| = |X_2(f)| = 1$  ist.

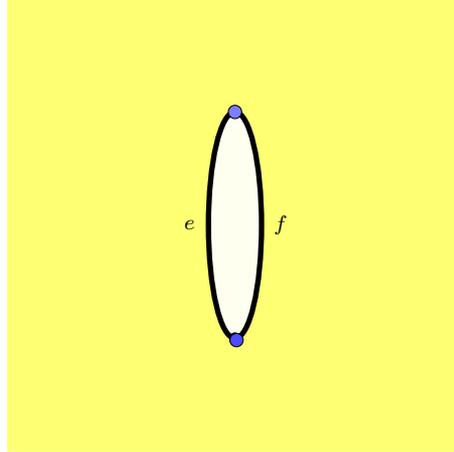


Abbildung 5: Randkantenpaar vom Typ 2

- b) Man nennt  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar vom Typ 1, falls  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar ist und beide Kanten zu genau einem gemeinsamen Knoten  $V_{e,f} \in X_0$  inzident sind. Das heißt, es gilt  $V_{e,f} < e$  und  $V_{e,f} < f$  in  $X$ . Die übrigen beiden Knoten, die zu  $e$  bzw.  $f$  inzident sind, werden mit  $V_e, V_f \in X_0$  bezeichnet, wobei  $V_e < e$  und  $V_f < f$  ist. Falls keine Kante  $g \in X_1$  mit  $X_0(g) = \{V_e, V_f\}$  existiert, dann ist das Randkantenpaar  $\{e, f\}$  vom Typ 1 mendable.

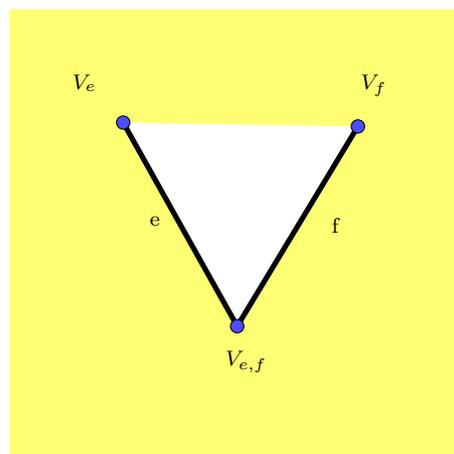


Abbildung 6: mendable Randkantenpaar vom Typ 1

- c) Man nennt  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar vom Typ 0, falls  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar ist und  $X_0(e) \cap X_0(f) = \emptyset$ , wobei  $X_0(e) = \{V_e, W_e\}$  und

$X_0(f) = \{V_f, W_f\}$  ist. Das Randkantenpaar ist mendable bezüglich  $V_e$  und  $V_f$ , falls keine Kante  $g \in X_1$  mit  $X_0(g) = \{W_e, W_f\}$  oder  $X_0(g) = \{V_e, V_f\}$  existiert.

Das Randkantenpaar  $\{e, f\}$  heißt mendable, falls es Knoten  $V \in \{V_e, W_e\}$  und  $W \in \{V_f, W_f\}$  gibt, sodass  $\{e, f\}$  mendable bezüglich  $V$  und  $W$  ist.

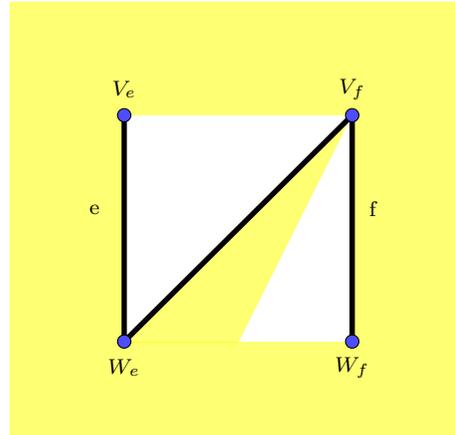


Abbildung 7: mendable Randkantenpaar vom Typ 0 bzgl.  $V_e$  und  $V_f$

**Bemerkung 3.2.** Es ist leicht einzusehen, dass die Kanten  $e, f \in X_1$  eines Randkantenpaares vom Typ  $i$ , genau  $i$  Knoten gemeinsam haben, wobei  $i = 0, 1, 2$  ist. Das heißt, es existieren  $V_1, \dots, V_i \in X_0$  mit

$$V_j < e \text{ und } V_j < f \text{ für } j=1, \dots, i.$$

### 3.2 Mending-Map

Ziel dieses Abschnittes ist es, Abbildungen zwischen zwei simplizialen Flächen zu charakterisieren. Von besonderem Interesse sind hierbei jene Abbildungen, in welchen Inzidenzen in der einen simplizialen Fläche Inzidenzen im Bild, also in der zweiten simplizialen Fläche, implizieren.

Zur Erinnerung wird nun der Begriff eines Urbildes einer Menge unter einer Abbildung angeführt.

**Bemerkung 3.3.** Seien  $A, B$  Mengen und  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion. Für  $M \subseteq B$  definiert man das Urbild von  $M$  in  $A$  durch

$$f^{-1}(M) := \{y \in A \mid f(y) \in M\}.$$

Für  $\{y\} \subseteq B$  schreibt man auch

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}).$$

**Definition 3.4.** Seien  $(X, <)$  und  $(Y, \prec)$  simpliziale Flächen.

1. Man nennt eine Überdeckung  $\alpha : X \rightarrow Y$  eine Mending Map, falls sie eine Bijektion  $\beta : X_2 \rightarrow Y_2$  induziert. Dadurch entsteht die simpliziale Fläche  $(X(\alpha), <_\alpha)$  mit den Knoten

$$X(\alpha)_0 := \{\alpha^{-1}(V) \mid V \in Y_0\},$$

den Kanten

$$X(\alpha)_1 := \{\alpha^{-1}(e) \mid e \in Y_1\}$$

und den Flächen

$$X(\alpha)_2 := X_2.$$

Für  $A, B \in Y$  gilt  $\alpha^{-1}(A) <_\alpha \alpha^{-1}(B)$  in  $X(\alpha)$  genau dann, wenn  $A \prec B$  in  $Y$  gilt. Außerdem ist  $(X(\alpha), <_\alpha)$  isomorph zu  $(Y, \prec)$ . Man nennt  $X(\alpha)$  ein Mending von  $X$ .

2. Die Menge aller Mendings von  $(X, <)$  wird definiert durch

$$\mathcal{M}(X) := \{X(\alpha) \mid (Y, \prec) \text{ simpl. Fläche so, dass } \alpha : X \rightarrow Y \text{ Mending Map}\}.$$

**Beispiel 3.5.** Sei  $J$  der oben definierte Janus-Kopf und  $X := 2\Delta$ . Dann ist die Abbildung

$$\alpha : X \rightarrow J, x \mapsto \begin{cases} e_i & \text{für } x = e_i^j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2 \\ V_i & \text{für } x = V_i^j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2 \\ F_i & \text{für } x = F_i, i = 1, 2 \end{cases}$$

nach Konstruktion eine Mending Map. Man erhält dadurch die simpliziale Fläche  $(X(\alpha), <_\alpha)$  definiert durch die Knoten

$$X(\alpha)_0 = \{\{V_1^1, V_1^2\}, \{V_2^1, V_2^2\}, \{V_3^1, V_3^2\}\},$$

die Kanten

$$X(\alpha)_1 = \{\{e_1^1, e_1^2\}, \{e_2^1, e_2^2\}, \{e_3^1, e_3^2\}\}$$

und die Flächen

$$X(\alpha)_2 = X_2 = \{F_1, F_2\}.$$

Es gilt  $x <_\alpha y$  in  $X(\alpha)$  genau dann, wenn

$$\begin{aligned} (x, y) \in & \{(\{V_i^1, V_i^2\}, \{e_j^1, e_j^2\}) \mid i = 1, 2, 3, j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}\} \cup \\ & \{(\{V_i^1, V_i^2\}, F_j) \mid i = 1, 2, 3, j = 1, 2\} \cup \\ & \{(\{e_i^1, e_i^2\}, F_j) \mid i = 1, 2, 3, j = 1, 2\}. \end{aligned}$$

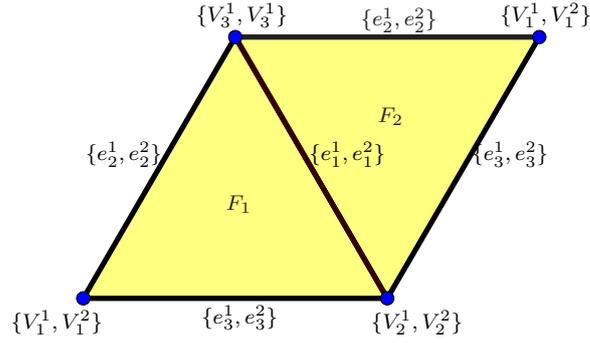


Abbildung 8: Mending einer simplizialen Fläche

**Bemerkung 3.6.** Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche.

1. Für ein  $Y \in \mathcal{M}(X)$  gilt  $Y_2 = X_2$ .
2.  $X$  bildet ein Mending von sich selbst mit der Identität als Mending Map.
3. Sei  $Y \in \mathcal{M}(X)$  ein Mending von  $X$ . Das heißt, es gilt  $Y = X(\alpha)$  für eine Mending Map  $\alpha : X \mapsto Z$ , wobei  $(Z, <)$  eine weitere simpliziale Fläche ist. Dann bildet die Relation

$$A \sim_\alpha B \Leftrightarrow \alpha(A) = \alpha(B), \quad A, B \in X$$

eine Äquivalenzrelation auf  $X$ .

4. Falls  $Y \in \mathcal{M}(X)$  und  $Z \in \mathcal{M}(Y)$  ist, so gilt auch  $Z \in \mathcal{M}(X)$ . Da  $Y \in \mathcal{M}(X)$  und  $Z \in \mathcal{M}(Y)$  ist, existieren die Mendings  $\alpha_1 : X \rightarrow Y$  und  $\alpha_2 : Y \rightarrow Z$ . Dann ist die Abbildung  $\alpha : X \rightarrow Z, x \mapsto \alpha_2(\alpha_1(x))$  eine Mending Map. Die Surjektivität von  $\alpha$  folgt aus der Surjektivität der Mending Maps  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Bleibt also nur noch zu zeigen, dass Inzidenzen in  $X$  Inzidenzen in  $Z$  implizieren. Seien dazu  $x, y \in X$ , die  $x < y$  erfüllen. Da  $\alpha_1$  eine Mending Map ist, folgt  $\alpha_1(x) < \alpha_1(y)$  in  $Y$ . Weil  $\alpha_2$  eine Mending Map ist, folgt aus  $\alpha_1(x) < \alpha_1(y)$  in  $Y$ , dass  $\alpha_2(\alpha_1(x)) < \alpha_2(\alpha_1(y))$  in  $Z$  gelten muss. Damit ist die Abbildung  $\alpha$  eine Mending Map.

**Definition 3.7.** Für eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  und  $i = 0, 1, 2$  definiert man  $I^i(X)$  als die Menge der Kanten mit  $i$  inneren Knoten, und  $BM^i(X)$  als die Menge der mendable Randkantenpaare vom Typ  $i$ . Also sind

$$I^i(X) := \{e \in X_1 \mid |X_0^0(e)| = i\} \text{ und}$$

$$BM^i(X) := \{\{e, f\} \subseteq X_1 \mid \{e, f\} \text{ ist ein mendable Randkantenpaar vom Typ } i\}.$$

### 3.3 Mender- und Cutter-Operatoren

Im Folgenden wird thematisiert, wie aus einer simplizialen Fläche durch Manipulation der Kanten eine weitere simpliziale Fläche konstruiert werden kann. Zu diesem Zweck werden die *Mender*-Operationen, die aus zwei Randkanten eine innere Kante konstruieren und die *Cutter*-Operationen, die aus einer inneren Kante zwei Randkanten hervorbringen, eingeführt.

Sei dazu  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche. Dann ist der Operator *Cratermender* definiert durch

$$C_{e,f}^m : \{Y \in \mathcal{M}(X) \mid \{e, f\} \in BM^2(Y)\} \rightarrow \{Z \in \mathcal{M}(X) \mid \{e, f\} \in I^2(Z)\}, Y \mapsto Z,$$

wobei  $Z_2 := Y_2, Z_1 := (Y_1 - \{e, f\}) \cup \{\{e, f\}\}$  und  $Z_0 := Y_0$  ist. Er setzt die beiden Randkanten  $e$  und  $f$  zu einer inneren Kante  $\{e, f\}$  vom Typ 2 zusammen, um somit die simpliziale Fläche  $Z = C_{e,f}^m(Y)$  zu erhalten. Den inversen Operator  $C_{\{e,f\}}^c$  nennt man *Cratercutter*.

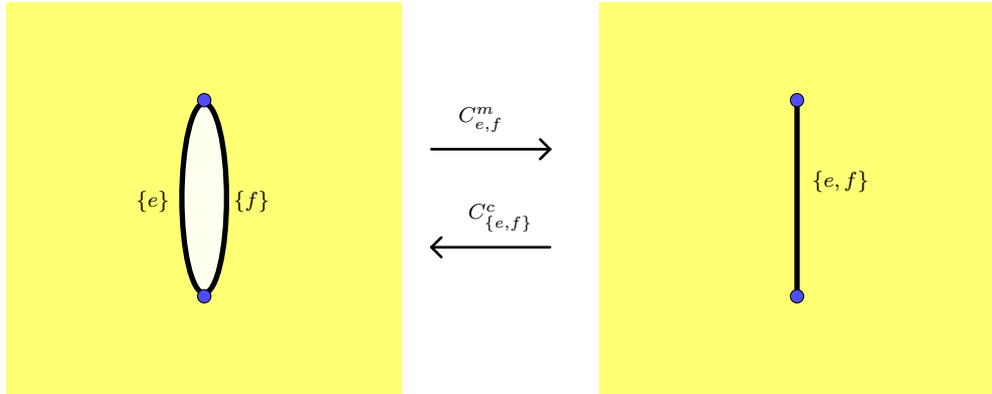


Abbildung 9: Cratercutter und Cratermender

Den Operator *Ripmender*, welcher ein mendable Randkantenpaar  $\{e, f\}$  vom Typ 1 zu einer inneren Kante  $\{e, f\}$  zusammensetzt, definiert man durch

$$R_{e,f}^m : \{Y \in \mathcal{M}(X) \mid \{e, f\} \in BM^1(Y)\} \rightarrow \{Z \in \mathcal{M}(X) \mid \{e, f\} \in I^1(Z)\}, Y \mapsto Z,$$

wobei  $Z_1 := (Y_1 - \{e, f\}) \cup \{\{e, f\}\}, Z_0 := (Y_0 - \{V_e, V_f\}) \cup \{\{V_e, V_f\}\}$ , und  $Z_2 := X_2$  ist und  $V_e, V_f, V_{e,f} \in Y_0$  wie in Definition 3.1 definiert sind. Die zum Ripmender inverse Operation  $R_{\{e,f\}}^c$  nennt man *Ripcutter*.

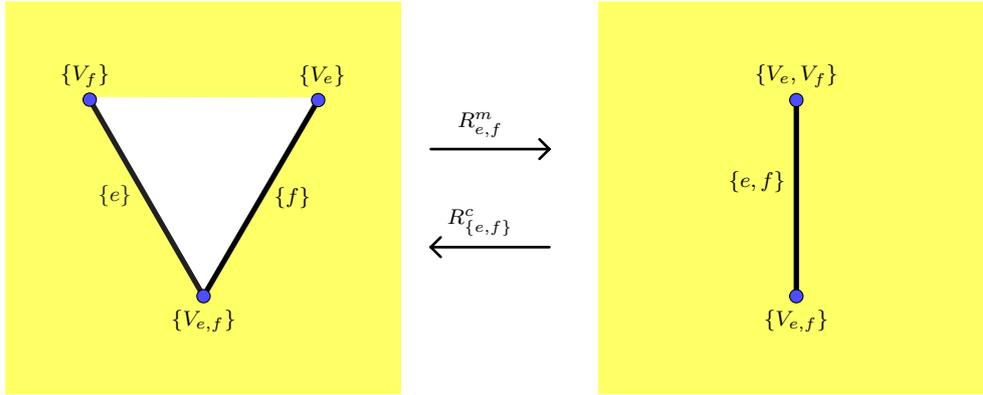


Abbildung 10: Ripcutter und Ripmender

Seien nun  $V, V'$  bzw.  $W, W'$  Knoten, die inzident zu  $e$  bzw.  $f$  sind. Dann ist

$$S_{(V,e),(W,f)}^m : \{Y \in \mathcal{M}(X) \mid \{e, f\} \in BM^0(Y) \text{ mendable bzgl. } V \text{ und } W\} \rightarrow \\ \{Z \in \mathcal{M}(X) \mid \{e, f\} \in I^0(Z)\}, Y \mapsto Z,$$

der Operator *Splitmender*, wobei  $Z_2 := X_2$ ,  $Z_1 := (Y_1 - \{e, f\}) \cup \{\{e, f\}\}$  und  $Z_0 := (Y_0 - (Y_0(e) \cup Y_0(f))) \cup \{\{V, W\}, \{V', W'\}\}$  ist. Dieser setzt zwei disjunkte Kanten, also Kanten, die keinen Knoten gemeinsam haben, zu einer inneren Kante zusammen, um somit die simpliziale Fläche  $Z = S_{(V,e),(W,f)}^m(Y) = S_{(V',e),(W',f)}^m(Y)$  zu erhalten. Dieser Operator hat ein eindeutiges Linksinverses, nämlich den Operator *Splitcutter*  $S_{\{e,f\}}^c$ , wobei dieser ebenfalls ein Linksinverses des Operators  $S_{(V',e),(W',f)}^C = S_{(V,e),(W,f)}^C$  ist, falls  $\{e, f\}$  mendable bezüglich  $V', W$  bzw.  $V, W'$  ist.

**Bemerkung 3.8.** Seien  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche,  $(Y, <) \in \mathcal{M}(X)$  ein Mending von  $X$  und  $e, f \in Y_1$  Kanten in  $X$  so, dass  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar ist. Falls  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar vom Typ 1 ist, ist klar, wie die simpliziale Fläche  $R_{e,f}^m(Y)$  aus  $(Y, <)$  hervorgeht. Gleiches gilt auch für die simpliziale Fläche  $C_{e,f}^m(Y)$ , falls  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar vom Typ 2 ist.

Der Fall, dass  $\{e, f\}$  ein Randkantenpaar vom Typ 0 ist, wird nun näher erläutert. Seien  $V_e, W_e \in Y_0$  die zu  $e$  und  $V_f, W_f \in Y_0$  die zu  $f$  zugehörigen Knoten. Das heißt

$$V_e, W_e < e \text{ und } V_f, W_f < f.$$

Dann werden zwei Fälle unterschieden:

1. Angenommen für  $V_1 \in \{V_e, W_e\}$  und  $V_2 \in \{V_f, W_f\}$  existiert keine Kante  $g \in Y_1$  mit  $X_0(g) = \{V_1, V_2\}$ . Dann existieren zwei Möglichkeiten, um mit dem Splitmender eine simpliziale Fläche zu konstruieren, nämlich  $Z = S_{(V_e,e),(V_f,f)}^m(Y)$  und  $T = S_{(V_e,e),(W_f,f)}^m(Y)$ , wobei für  $\{V_e, V_f\}, \{W_e, W_f\} \in Z_0$  und  $\{e, f\} \in Z_1$  die Relation

$$\{V_e, V_f\}, \{W_e, W_f\} <_1 \{e, f\}$$

mit  $\prec_1$  als Inzidenz auf  $Z$  und für  $\{V_e, W_f\}, \{V_f, W_e\} \in T_0$  und  $\{e, f\} \in T_1$  die Relation

$$\{V_e, W_f\}, \{V_f, W_e\} \prec_2 \{e, f\}$$

mit  $\prec_2$  als Inzidenz auf  $T$  gilt.

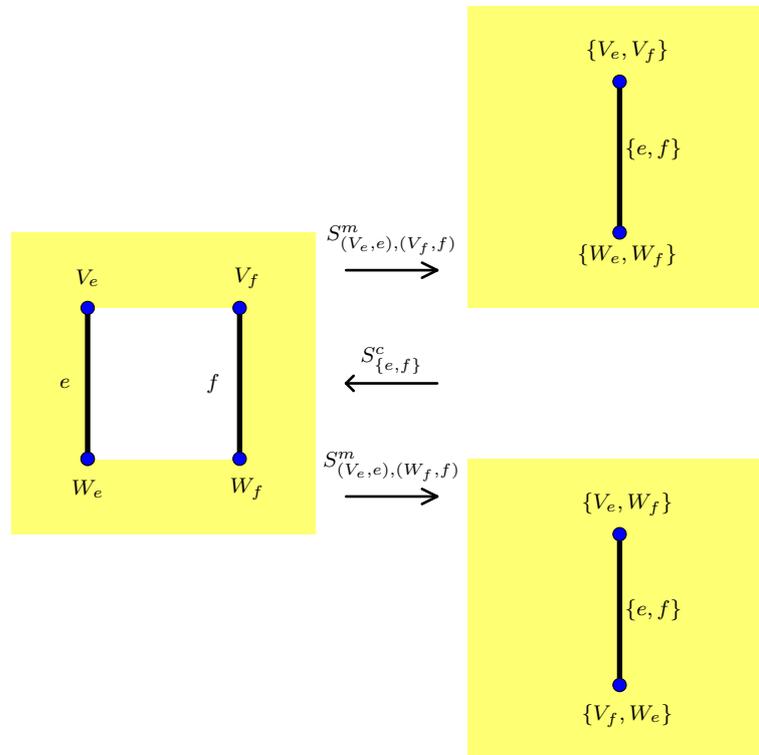


Abbildung 11: Splitmender und Splitcutter

2. Angenommen es existiert eine Kante  $g \in Y_1$  mit  $V_e, W_f <_\alpha g$ , aber für  $V_f$  und  $W_e$  existiert keine Kante  $h \in Y_1$  mit  $V_f, W_e <_\alpha h$ .

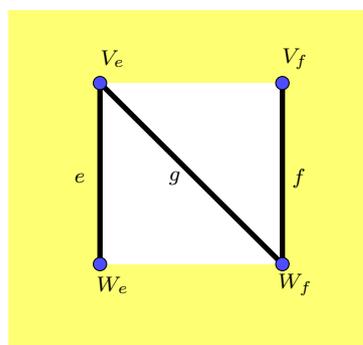


Abbildung 12: mendable Randkantenpaar vom Typ 0 bzgl.  $V_e, V_f$

Dann gibt es genau eine Möglichkeit mit dem Splitmender eine simpliziale

Fläche zu konstruieren, nämlich  $Z = S_{(V_e, e), (V_f, f)}^m(Y)$ , wobei für die Knoten  $\{V_e, V_f\}, \{W_e, W_f\} \in Z_0$  und  $\{e, f\} \in Z_1$  die Relationen

$$\{V_e, V_f\}, \{W_e, W_f\} \prec_Z \{e, f\}$$

und

$$\{V_e, V_f\}, \{W_e, W_f\} \prec_Z g$$

gelten. Dabei ist  $\prec_Z$  die Inzidenz auf  $Z$ .

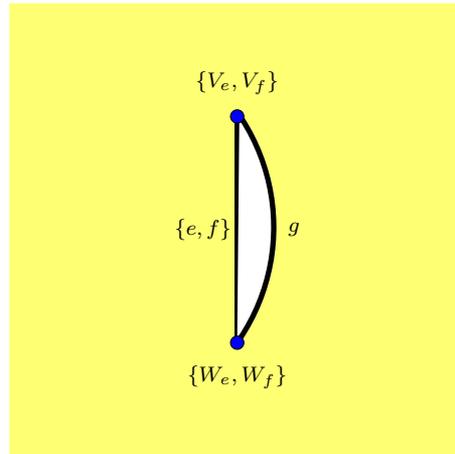


Abbildung 13: simpliziale Fläche nach Anwendung eines Splitmenders

**Bemerkung 3.9.** Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche mit  $n$  Flächen. Dann gilt

1.  $X$  ist isomorph zu einer simplizialen Fläche  $(Y, <) \in \mathcal{M}(n\Delta)$ .
2. Sei  $k$  die Anzahl der inneren Kanten in  $(X, <)$ . Dann ist die Anzahl, der auf  $n\Delta$  ausgeführten Mender-Operationen, um  $X$  zu erhalten, ebenfalls  $k$ . Eine analoge Aussage gilt auch für Cutter-Operationen.
3. Es können genau dann keine Mender-Operationen auf  $X$  durchgeführt werden, wenn  $X$  geschlossen ist oder isomorph zu einer geschlossenen simplizialen Fläche ist, aus der eine Fläche entfernt wurde.
4. Es gilt  $X = n \cdot \Delta$  genau dann, wenn keine Cutter-Operationen auf  $X$  angewendet werden können.

### 3.4 Euler-Charakteristik

**Definition 3.10.** Für eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  wird die Euler-Charakteristik  $\chi(X)$  als

$$\chi(X) := |X_0| - |X_1| + |X_2|$$

definiert.

**Bemerkung 3.11.** Zwei isomorphe simpliziale Flächen  $(X, <)$  und  $(Y, <)$  haben dieselbe Euler-Charakteristik, denn eine bijektive Abbildung  $\alpha : X \rightarrow Y$  impliziert, wie oben schon erwähnt, bijektive Abbildungen  $X_i \rightarrow Y_i$  für  $i = 0, 1, 2$ . Damit ist  $|X_i| = |Y_i|$ , woraus man

$$\chi(X) = |X_0| - |X_1| + |X_2| = |Y_0| - |Y_1| + |Y_2| = \chi(Y)$$

folgern kann.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht, denn beispielsweise für den Janus-Kopf  $J$  und das Tetraeder  $(T, <)$ , definiert durch das ordinale Symbol

$$\omega((T, <)) := (4, 6, 4; (\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}), (\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 5, 6\}, \{2, 3, 4\})),$$

gilt

$$\chi(J) = 3 - 3 + 2 = 2 = 4 - 6 + 4 = \chi(T).$$

Aber wegen  $|J_i| \neq |T_i|$  für  $i = 0, 1, 2$  sind  $J$  und  $T$  nicht isomorph zueinander.

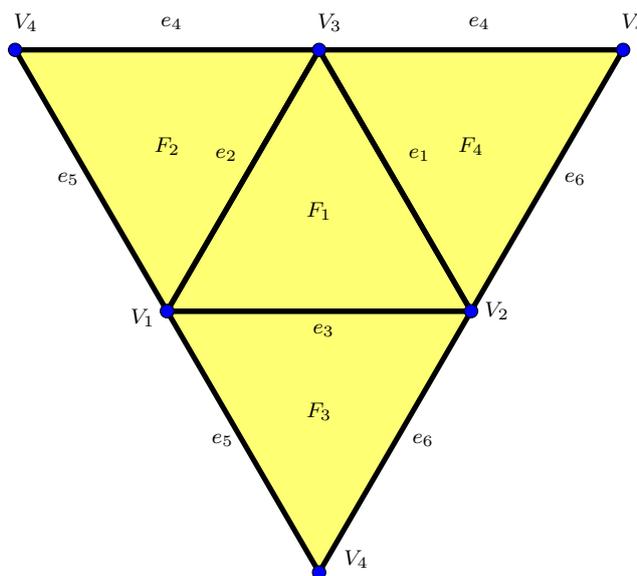


Abbildung 14: Tetraeder

Wenn man die Euler-Charakteristik einer simplizialen Fläche  $(X, <)$  unter Anwendung der Mender- und Cutteroperatoren beobachtet, so ergibt sich

$$\chi(C_{\{e,f\}}^c(X)) = \chi(X) - 1,$$

für  $\{e, f\} \in X_1$ , falls  $\{e, f\} \in I^2(X)$  ist. Denn für die Knoten, Kanten und Flächen der simplizialen Fläche  $C_{\{e,f\}}^c(X)$  gilt  $|C_{\{e,f\}}^c(X)_0| = |X_0|$ ,  $|C_{\{e,f\}}^c(X)_1| = |X_1| + 1$  und  $|C_{\{e,f\}}^c(X)_2| = |X_2|$ . Somit erhält man

$$\begin{aligned} \chi(C_{\{e,f\}}^c(X)) &= |C_{\{e,f\}}^c(X)_0| - |C_{\{e,f\}}^c(X)_1| + |C_{\{e,f\}}^c(X)_2| \\ &= |X_0| - (|X_1| + 1) + |X_2| \\ &= |X_0| - |X_1| + |X_2| - 1 \\ &= \chi(X) - 1. \end{aligned}$$

Durch analoge Herangehensweise bei den anderen Cutter- und Menderoperatoren ergibt sich Folgendes:

- Falls  $\{e, f\} \in BM^2(X)$ , dann ist

$$\chi(C_{e,f}^m(X)) = \chi(X) + 1.$$

- Falls  $\{e, f\} \in I^1(X)$ , dann ist

$$\chi(R_{\{e,f\}}^c(X)) = \chi(X).$$

- Falls  $\{e, f\} \in BM^1(X)$ , dann ist

$$\chi(R_{e,f}^m(X)) = \chi(X).$$

- Falls  $\{e, f\} \in I^0(X)$ , dann ist

$$\chi(S_{\{e,f\}}^c(X)) = \chi(X) + 1.$$

- Und falls  $\{e, f\} \in BM^0(X)$  mendable bezüglich  $V_e, V_f \in X_0$  mit  $V_e < e$  und  $V_f < f$  ist, dann ist

$$\chi(S_{(V_e,e),(V_f,f)}^m(X)) = \chi(X) - 1.$$

Von besonderem Interesse sind in dieser Arbeit die simplizialen Flächen, die geschlossen sind und deren Euler-Charakteristik 2 ist, denn für diese simplizialen Flächen kann man unter gewissen Voraussetzungen die Transitivität der Operation Wanderringhole, die im nächsten Kapitel definiert wird, nachweisen.

## 4 Das wandernde Loch

**Bemerkung 4.1.** Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche. Für  $x \in X$  und  $m \in \mathbb{N}$  schreibt man  $x = \{x_1, \dots, x_m\}$  und dies wird wie folgt interpretiert:

Man identifiziert  $X$  mit der isomorphen simplizialen Fläche  $Y \in \mathcal{M}(n\Delta)$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Flächen in  $X$  ist. Es gilt  $x_1, \dots, x_m \in n\Delta$  und  $\{x_1, \dots, x_m\} \in Y$ . Außerdem gilt  $\beta(\{x_1, \dots, x_m\}) = x$  für einen Isomorphismus  $\beta : Y \mapsto X$ .

Dabei soll hier weniger im Vordergrund stehen, wie man diese simpliziale Fläche konstruiert oder wie die Urbilder der anderen Elemente der simplizialen Fläche  $X$  aussehen. Diese Notation soll lediglich zur Erleichterung der Anwendung der Mender- und Cutteroperatoren auf  $X$  dienen.

Zum weiteren Verständnis der oben eingeführten Notation führt man folgendes Beispiel an.

**Beispiel 4.2.** Für die simpliziale Fläche  $(X, <)$ , definiert durch das ordinale Symbol

$$\omega((X, <)) = (4, 5, 2; (\{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}), (\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\})),$$

schreibt man  $V_1 = \{V_1^1, V_1^2\}$ ,  $e_1 = \{e_1^1, e_1^2\}$  für  $V_1 \in X_0$ ,  $e_1 \in X_1$  und  $V_1^1, V_1^2 \in 2\Delta_0$ ,  $e_1^1, e_1^2 \in 2\Delta_1$  und meint damit den Knoten und die Kante der simplizialen Fläche  $2\Delta(\alpha)$ , wobei die Mending Map  $\alpha : 2\Delta \mapsto X$  gegeben ist durch

$$\alpha(x) = \begin{cases} e_i & \text{für } x = e_i^j, i = 1, j = 1, 2 \\ e_{i+j} & \text{für } x = e_i^j, i = 2, 3, j = 2 \\ e_{5-i} & \text{für } x = e_i^j, i = 2, 3, j = 1 \\ V_i & \text{für } x = V_i^j, i = 2, 3, j = 1, 2 \\ V_1 & \text{für } x = V_1^1 \\ V_4 & \text{für } x = V_1^2 \\ F_j & \text{für } x = F_j, j = 1, 2 \end{cases}$$

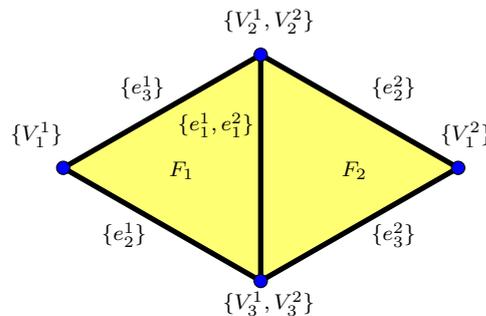


Abbildung 15: isomorphe simpliziale Fläche in  $n\Delta$

Nun definiert man die in der Einleitung schon angesprochene Operation Wanderringhole, um darauffolgend die Eigenschaften dieser Operation zu untersuchen.

Seien dazu  $(X, <)$  eine geschlossene simpliziale Fläche,  $F \in X_2$  eine Fläche,  $e_i \in X_1$  Kanten und  $V_j \in X_0$  Knoten in  $X$  für  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $|X_2| \geq 4$ ,
- $e_i < F$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,
- $V_i < e_j$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ ,
- $V_i < F$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Zudem seien  $f, g \in X_1, V_4 \in X_0, F' \in X_2$  so, dass

- $e_3 < F'$ ,
- $f, g < F'$ ,
- $V_1, V_4 < f$  und  $V_2, V_4 < g$  gilt,

wobei die bis jetzt genannten Knoten, Kanten und Flächen paarweise verschieden sind.

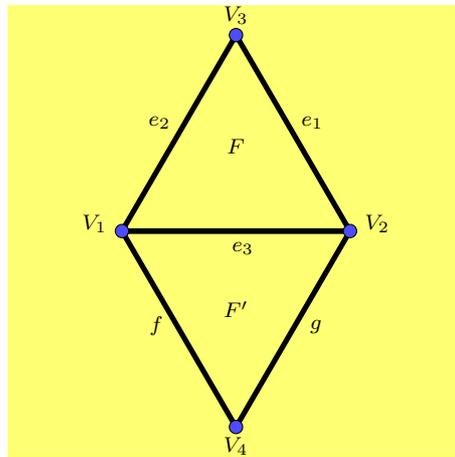


Abbildung 16: Ausschnitt einer simplizialen Fläche

Für die folgende Konstruktion nutzt man Bemerkung 4.1 und identifiziert  $X$  mit der zu  $X$  isomorphen simplizialen Fläche  $Y \in (n\Delta)$ , wobei  $n = |X_2|$  ist. Die simpliziale Fläche  $Y$  wird durch die folgenden Identitäten festgesetzt:

- $e_i = \{e_i^1, e_i^2\}$  für  $i = 1, 2, 3$
- $V_j = \{V_j^1, V_j^2\}$  für  $j = 2, 3$

- $V_1 = \{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}$
- $f = \{f^1, f^2\}$
- $g = \{g\}$
- $V_4 = \{V_4\}$

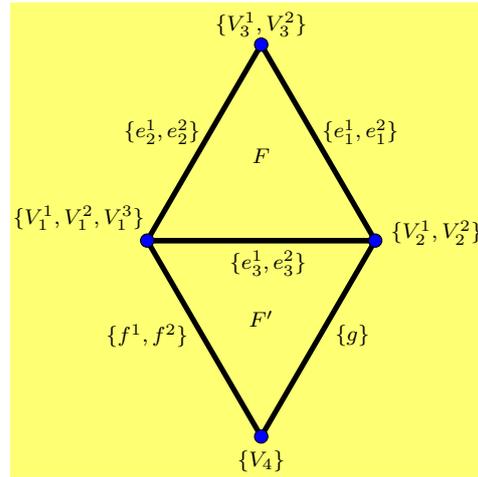


Abbildung 17: Ausschnitt eines Mendings einer simplizialen Fläche

**Bemerkung 4.3.** Durch die Anwendung von Mender- und Cutter-Operationen auf eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  entsteht eine simpliziale Fläche mit veränderten Knoten, Kanten, Flächen und einer veränderten Inzidenzrelation. Diese sollen in den drei folgenden Prozeduren in Tabellen festgehalten werden, wobei man nur die für die Konstruktion relevanten Knoten, Kanten und Flächen aufführt. Wegen der Transitivität der Relation reicht es, die Mengen  $X_0(e)$  und  $X_2(e)$  von den veränderten Kanten  $e \in X_1$  aufzustellen. Beispielsweise stellt man die Inzidenzen der simplizialen Fläche in der Abbildung 17 durch folgende Tabellen dar. Es soll zum Beispiel angedeutet werden, dass  $\{\{V_2^1, V_2^2\}, \{V_3^1, V_3^2\}\} \subset X_0(\{e_1^1, e_1^2\})$  und damit auch  $\{\{V_2^1, V_2^2\}, \{V_3^1, V_3^2\}\} \subset X_0(F)$  ist.

$e$	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1, e_1^2\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}, \{V_3^1, V_3^2\}$	$F$
$\{e_2^1, e_2^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_3^1, V_3^2\}$	$F$
$\{e_3^1, e_3^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_2^1, V_2^2\}$	$F, F'$
$\{f^1, f^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_4\}$	$F'$
$\{g\}$	$\{V_4\}, \{V_2^1, V_2^2\}$	$F'$

Ziel ist es, wie schon erwähnt, durch die Anwendung der Mender- und Cutteroperatoren aus  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche  $X_{(F,f)}^H$  zu konstruieren. Hierzu definiert man die folgenden drei Prozeduren:

#### 4.1 Prozedur $P^1$

Zunächst soll ein sogenanntes *Loch an der Stelle  $F$*  erzeugt werden, welches entsteht, wenn man  $F$  von der simplizialen Fläche trennt:

- (i) Wende den *Cratercut*  $C_{\{e_1^1, e_1^2\}}^c$  an, um aus der Kante  $\{e_1^1, e_1^2\}$  die Kanten  $\{e_1^1\}$  und  $\{e_1^2\}$  zu erhalten, wobei die Inzidenzen durch folgende Tabelle gegeben sind:

e	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}, \{V_3^1, V_3^2\}$	$F$
$\{e_1^2\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}, \{V_3^1, V_3^2\}$	
$\{e_2^1, e_2^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_3^1, V_3^2\}$	$F$
$\{e_3^1, e_3^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_2^1, V_2^2\}$	$F, F'$
$\{f^1, f^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_4\}$	$F'$
$\{g\}$	$\{V_4\}, \{V_2^1, V_2^2\}$	$F'$

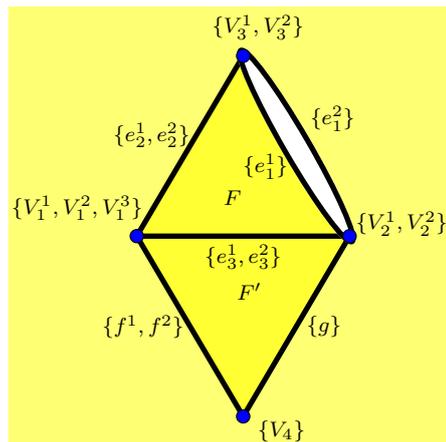


Abbildung 18: simpliziale Fläche nach einem Cratercut

- (ii) Wende den *RipCut*  $R_{\{e_2^1, e_2^2\}}^c$  an, um aus dem Knoten  $\{V_3^1, V_3^2\}$  die Knoten  $\{V_3^1\}$  und  $\{V_3^2\}$  und aus der Kante  $\{e_2^1, e_2^2\}$  die Kanten  $\{e_2^1\}$  und  $\{e_2^2\}$  mit den folgenden Inzidenzen zu erhalten.

$e$	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_1^2\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}, \{V_3^2\}$	
$\{e_2^1\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_2^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_3^2\}$	
$\{e_3^1, e_3^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_2^1, V_2^2\}$	$F, F'$
$\{f^1, f^2\}$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}, \{V_4\}$	$F'$
$\{g\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}, \{V_4\}$	$F'$

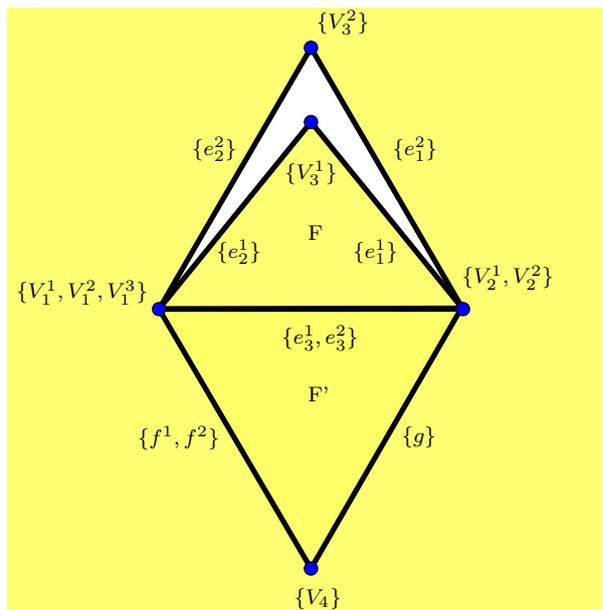


Abbildung 19: simpliziale Fläche nach einem Ripcut

- (iii) Wende den *SplitCut*  $S_{\{e_3^1, e_3^2\}}^c$  an, um aus der Kante  $\{e_3^1, e_3^2\}$  die Kanten  $\{e_3^1\}$  und  $\{e_3^2\}$ , aus dem Knoten  $\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}$  die Knoten  $\{V_1^1\}$  und  $\{V_1^2, V_1^3\}$  und aus dem Knoten  $\{V_2^1, V_2^2\}$  die Knoten  $\{V_2^1\}$  und  $\{V_2^2\}$  zu erhalten, wobei für die veränderten Knoten, Kanten und Flächen Folgendes gilt

$e$	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1\}$	$\{V_2^1\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_1^2\}$	$\{V_2^2\}, \{V_3^2\}$	
$\{e_2^1\}$	$\{V_1^1\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_2^2\}$	$\{V_1^2, V_1^3\}, \{V_3^2\}$	
$\{e_3^1\}$	$\{V_1^1\}, \{V_2^1\}$	$F$
$\{e_3^2\}$	$\{V_1^2, V_1^3\}, \{V_2^2\}$	$F'$
$\{f^1, f^2\}$	$\{V_1^2, V_1^3\}, \{V_4\}$	$F'$
$\{g\}$	$\{V_2^2\}, \{V_4\}$	$F'$

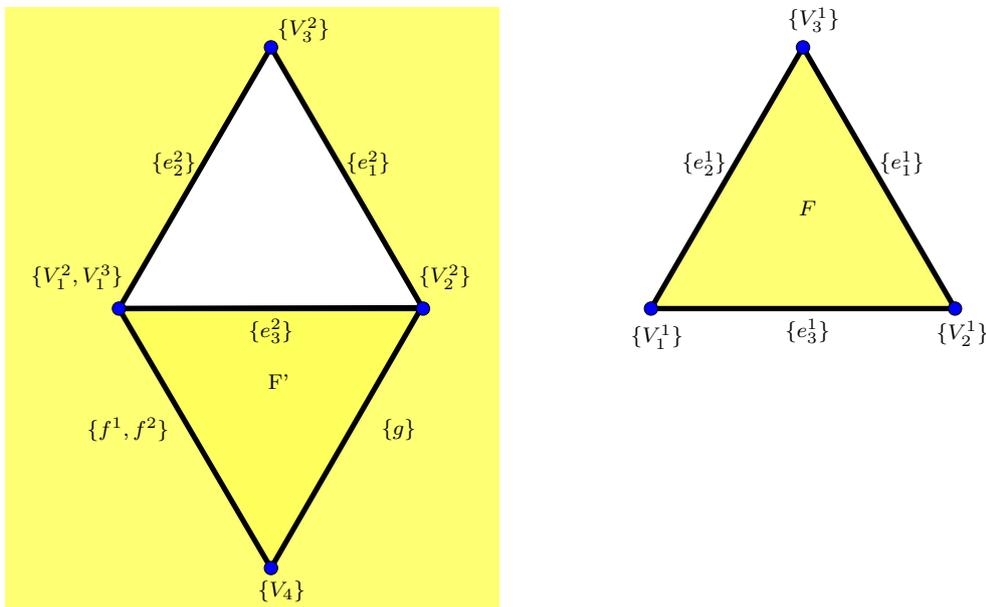


Abbildung 20: simpliziale Fläche nach einem Splitcut

Durch diese Anwendung der Operatoren auf  $X$  erhält man eine simpliziale Fläche  $(Y, \prec) \in \mathcal{M}(X)$  mit den zwei disjunkten Mengen  $X^1$  und  $X^2$ , wobei  $X^1 = \{F, \{V_1^1\}, \{V_2^1\}, \{V_3^1\}, \{e_1^1\}, \{e_2^1\}, \{e_3^1\}\}$  mit den Inzidenzen

- $\{e_i^1\} < F$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,
- $\{V_i^1\} < \{e_j^1\}$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ ,
- $\{V_i^1\} < F$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,

das Dreieck und  $X^2$ , die Fläche mit fehlender Fläche  $F$ , beschreibt.

Es entstehen also Randkanten  $\{e_i^2\}, \{e_i^2\}$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ , wobei die Kanten  $\{e_i^2\}$  zu der Komponente  $X^2$  gehören.

Man bezeichnet die simpliziale Fläche, die nach der Anwendung der Prozedur  $P^1$  entsteht, mit  $P_F^1(X) := (S_{\{e_3, e_3\}}^c \circ R_{\{e_2, e_2\}}^c \circ C_{\{e_1, e_1\}}^c)(X)$ .

### 4.2 Prozedur $P^2$

Nun soll das *Loch an der Stelle  $F$*  verschoben werden.

- (i) Wende den *Ripcut*  $R_{\{f^1, f^2\}}^c$  an, um aus der Kante  $\{f^1, f^2\}$  die Kanten  $\{f^1\}$  und  $\{f^2\}$  und aus dem Knoten  $\{V_1^2, V_1^3\}$  die Knoten  $\{V_1^2\}$  und  $\{V_1^3\}$  zu erhalten, wobei für die veränderten Inzidenzen Folgendes gilt

$e$	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1\}$	$\{V_2^1\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_1^2\}$	$\{V_2^2\}, \{V_3^2\}$	
$\{e_2^1\}$	$\{V_1^1\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_2^2\}$	$\{V_1^3\}, \{V_3^2\}$	
$\{e_3^1\}$	$\{V_1^1\}, \{V_2^1\}$	$F$
$\{e_3^2\}$	$\{V_1^2\}, \{V_2^2\}$	$F'$
$\{f^1\}$	$\{V_1^3\}, \{V_4\}$	
$\{f^2\}$	$\{V_1^2\}, \{V_4\}$	$F'$
$\{g\}$	$\{V_2^2\}, \{V_4\}$	$F'$

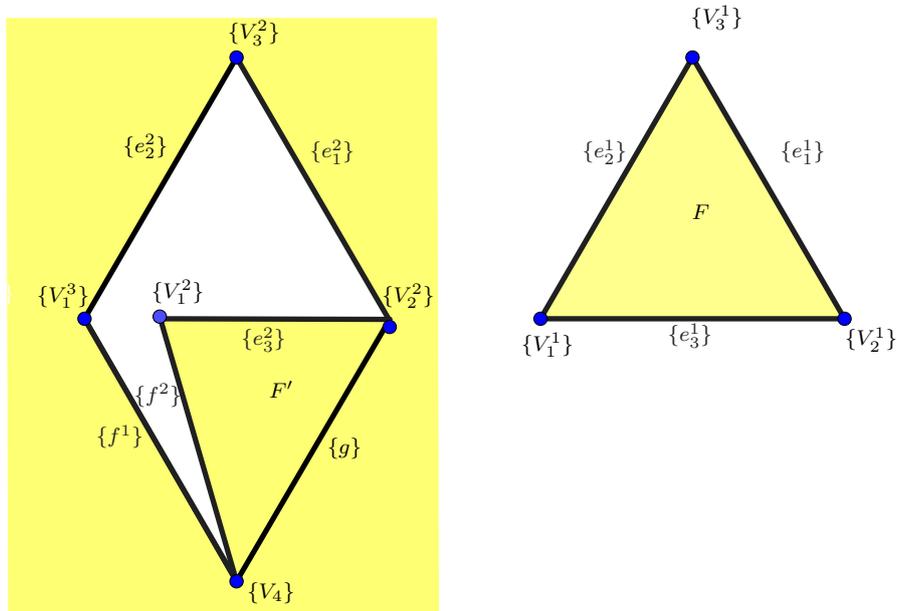


Abbildung 21: simpliziale Fläche nach einem Ripcut

- (ii) Wende den *Ripmender*  $R_{\{e_1^2, e_3^2\}}^m$  an, um die Kanten  $\{e_1^2\}$  und  $\{e_3^2\}$  zu einer

Kante  $\{e_1^2, e_3^2\}$  und die Knoten  $\{V_1^2\}$  und  $\{V_3^2\}$  zu dem Knoten  $\{V_1^2, V_3^2\}$  zusammenzuführen.

e	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1\}$	$\{V_2^1\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_1^2, e_3^2\}$	$\{V_1^2, V_3^2\}, \{V_2^2\}$	$F'$
$\{e_2^1\}$	$\{V_1^1\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_2^2\}$	$\{V_1^2, V_3^2\}, \{V_1^3\}$	
$\{e_3^1\}$	$\{V_1^1\}, \{V_2^1\}$	$F$
$\{f^1\}$	$\{V_1^3\}, \{V_4\}$	
$\{f^2\}$	$\{V_1^2, V_3^2\}, \{V_4\}$	$F'$
$\{g\}$	$\{V_2^2\}, \{V_4\}$	$F'$

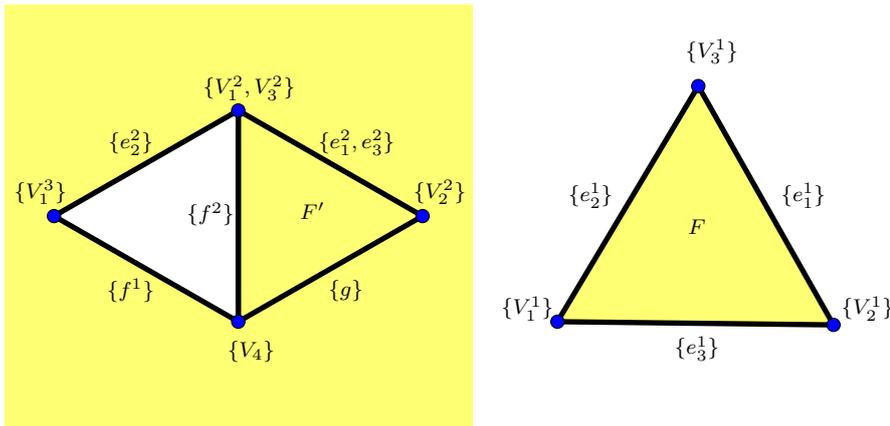


Abbildung 22: simpliziale Fläche nach Anwendung eines Ripmernders

Für eine nach der Prozedur  $P^1$  entstandene simpliziale Fläche  $Z = P_F^1(X)$  bezeichnet man die simpliziale Fläche, die nach Anwendung der zweiten Prozedur entsteht, mit  $P_f^2(Z) := (R_{\{e_1^2\}, \{e_3^2\}}^m \circ R_{\{f^1\}, \{f^2\}}^c)(Z)$ . Das heißt,  $P_f^2(P_F^1(X))$  ist die Fläche, die nach der Anwendung der beiden Prozeduren  $P^1$  und  $P^2$  auf die gegebene simpliziale Fläche  $X$  entsteht.

### 4.3 Prozedur $P^3$

Zuletzt müssen nun die simpliziale Fläche mithilfe der folgenden Operationen wieder zusammengesetzt werden:

- (i) Wende den *Splitmender*  $S_{(\{V_1^1\}, \{e_3^1\}), (\{V_4\}, \{f^2\})}^m$  an, um die Kanten  $\{f^2\}$  und  $\{e_3^1\}$  zu der Kante  $\{e_3^1, f^2\}$  zusammenzuführen und so ebenfalls aus den Knoten

$\{V_1^1\}$  und  $\{V_4\}$  den Knoten  $\{V_1^1, V_4\}$  und aus den Knoten  $\{V_1^2, V_3^2\}$  und  $\{V_2^1\}$  den Knoten  $\{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$  zu konstruieren.

$e$	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1\}$	$\{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_1^2, e_3^2\}$	$\{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}, \{V_2^2\}$	$F'$
$\{e_2^1\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_3^1\}$	$F$
$\{e_2^2\}$	$\{V_1^3\}, \{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	
$\{e_3^1, f^2\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	$F, F'$
$\{f^1\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_1^3\}$	
$\{g\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_2^2\}$	$F'$

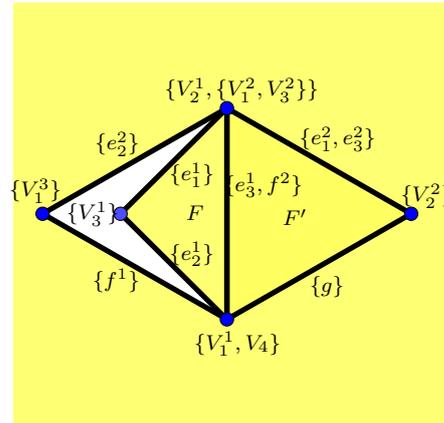


Abbildung 23: simpliziale Fläche nach Anwendung eines Splitmenders

- (ii) Wende den *Ripmender*  $R_{\{e_2^1, \{f^1\}}^m$  an, um die Kanten  $\{e_2^1\}$  und  $\{f^1\}$  zu der Kante  $\{e_2^1, \{f^1\}$  und die Knoten  $\{V_1^3\}$  und  $\{V_3^1\}$  zu dem Knoten  $\{V_1^3, V_3^1\}$  zusammenzuführen.

$e$	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1\}$	$\{V_1^3, V_3^1\}, \{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	$F$
$\{e_1^2, e_3^2\}$	$\{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}, \{V_2^2\}$	$F'$
$\{e_2^1, f_1\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_1^3, V_3^1\}$	$F$
$\{e_2^2\}$	$\{V_1^3, V_3^1\}, \{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	
$\{e_3^1, f^2\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	$F, F'$
$\{g\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_2^2\}$	$F'$

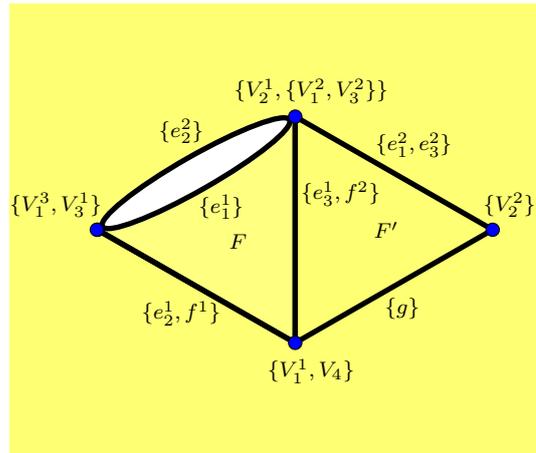


Abbildung 24: simpliziale Fläche nach Anwendung eines Ripmenders

(iii) Wende den *Cratermender*  $R_{\{e_1^1\}, \{e_2^2\}}^m$  an, um die Kanten  $\{e_1^1\}$  und  $\{e_2^2\}$  zu einer Kante  $\{e_1^1, e_2^2\}$  zu vereinen.

$e$	$X_0(e)$	$X_2(e)$
$\{e_1^1, e_2^2\}$	$\{V_1^3, V_3^1\}, \{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	$F$
$\{e_1^2, e_3^2\}$	$\{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}, \{V_2^2\}$	$F'$
$\{e_2^1, f_1\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_1^3, V_3^1\}$	$F$
$\{e_3^1, f^2\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	$F, F'$
$\{g\}$	$\{V_1^1, V_4\}, \{V_2^2\}$	$F'$

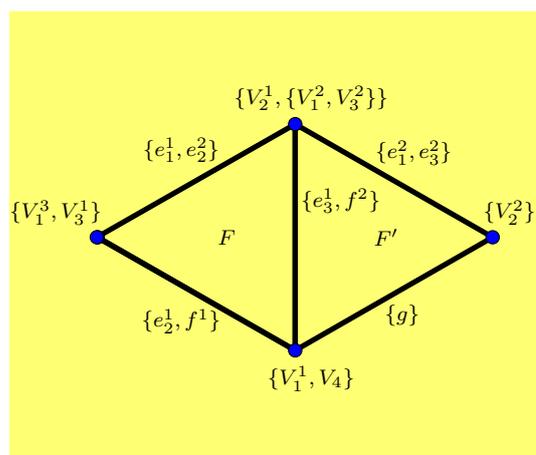


Abbildung 25: simpliziale Fläche nach einem Cratermender

Für eine durch die Prozedur  $P^1$  oder  $P^2$  entstandene simpliziale Fläche  $Z$  bezeichnet man die simpliziale Fläche, die aus der Prozedur  $P^3$  hervorgeht, mit  $P_F^3(Z) :=$

$$(S_{(\{V_1^1\}, \{e_3^1\}), (\{V_4\}, \{f^2\})}^m \circ R_{\{e_2^1\}, \{f^1\}}^m \circ C_{\{e_1^1\}, \{e_2^1\}}^m)(Z).$$

Somit ist  $P_F^3(P_f^2(P_F^1(X)))$  die simpliziale Fläche, die aus  $X$  nach der Anwendung der drei Prozeduren hervorgeht.

**Bemerkung 4.4.** 1. Es gilt  $P_F^3(P_F^1(X)) \cong X$  für ein  $F \in X_2$ .

2. Die Prozeduren hängen nicht nur von  $F$  ab, sondern auch von der Wahl der Kanten von  $F$ .

3. Es gibt für eine nach der ersten Prozedur entfernte Fläche  $F \in X_2$  genau drei Möglichkeiten, um eine von den drei entstandenen Randkanten auszuwählen. Dann gibt es weiterhin zwei Möglichkeiten eine Kante, wie im erstem Schritt der Prozedur  $P^2$  beschrieben, auszuwählen und dann letztlich drei Möglichkeiten, um die in der Prozedur  $P^1$  herausgenommene Fläche wieder einzufügen. Deshalb ist die nach den drei Prozeduren entstandene simpliziale Fläche nicht eindeutig und aufgrund dessen wird folgende Notation eingeführt:

- Man nennt die durch die Anwendung der drei Prozeduren entstandene simpliziale Fläche  $X_{(F,f)}^H$ , falls zunächst ein Loch an der Stelle  $F$  entsteht und dann in der Prozedur  $P^2$  der Operator RipCutter auf die Kante  $f = \{f^1, f^2\}$  in  $X$  angewendet wird.
- Für eine geschlossene simpliziale Fläche  $(X, <)$  und eine Fläche  $F \in X_2$  definiert man die Menge  $\mathcal{W}_F(X)$  als

$$\mathcal{W}_F(X) := \{f \in X_1 \mid |X_0(f) \cap X_0(F)| = 1 \wedge X_2(f) \cap X_2(X_1(F)) \neq \emptyset\}.$$

Für den Fall, dass  $X$  eine simpliziale Fläche ist, auf die man die Prozedur  $P^3$  anwenden kann, so definiert man

$$\mathcal{W}_F(X) := \mathcal{W}(P_F^3(X)).$$

Hierbei handelt es sich um die Menge aller Kanten, mit denen man die Prozedur  $P^2$  auf  $X$  durchführen kann, falls man in Prozedur  $P^1$  die Fläche  $F$  entfernt hat. Ein  $f \in \mathcal{W}_F(X)$  nennt man eine Wanderkante in  $X$  und  $\mathcal{W}_F(X)$  ist die Menge der Wanderkanten.

Sind  $F$  und  $f$  aus dem Kontext klar, so schreibt man nur  $X^H$ . Beispielsweise ist für das Oktaeder  $(O, <)$ , welches durch das ordinale Symbol

$$\begin{aligned} \omega((O, <)) = & (6, 12, 8; (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \\ & \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}), (\{1, 2, 5\}, \{6, 7, 12\}, \{1, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \\ & \{3, 4, 10\}, \{8, 9, 11\}, \{2, 3, 8\}, \{10, 11, 12\})) \end{aligned}$$

definiert ist und  $F_1 \in O_2$ , die Menge aller Kanten, mit denen man die Prozedur  $P^2$  an der Stelle  $F_1$  durchführen kann, gegeben durch die Menge  $\mathcal{W}_{F_1}(O) = \{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ .

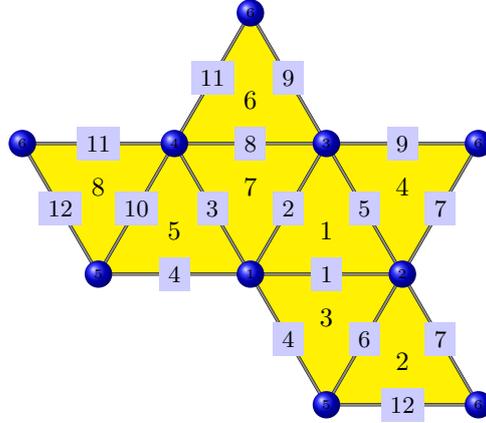


Abbildung 26: Oktaeder

**Bemerkung 4.5.** • Für eine geschlossene simpliziale Fläche  $(X, <)$ , eine Fläche  $F \in X_2$  und eine Wanderkante  $f \in \mathcal{W}(X)$  ist  $X_{(F,f)}^H$  wieder eine geschlossene simpliziale Fläche.

- Mit den Bezeichnungen wie oben gilt  $(X_{(F,f)}^H)_{(F,\{e_1^2, e_3^2\})}^H \cong X$ .

#### 4.4 Lochwanderungssequenzen

Es stellt sich nun die Frage, welche und wie viele simpliziale Flächen mithilfe der obigen Prozeduren konstruiert werden können, wenn man nach der ersten Prozedur die Prozedur  $P^2$  mehrfach auf eine simpliziale Fläche anwendet, bevor dann darauffolgend mithilfe der Prozedur  $P^3$  wieder eine geschlossene simpliziale Fläche entsteht.

Hierfür führt man einige Notationen ein.

**Definition 4.6.** Seien  $(X, <)$  eine geschlossene simpliziale Fläche,  $F \in X_2$  eine Fläche und  $n \in \mathbb{N}$ . Sei außerdem  $(F, f_1, \dots, f_n)$  ein Tupel mit

- $f_1 \in \mathcal{W}_F(P_F^1(X))$ ,
- $f_i \in \mathcal{W}_F((P_{f_{i-1}}^2 \circ \dots \circ P_{f_1}^2 \circ P_F^1)(X))$ , für  $i = 2, \dots, n$ .

So ist  $X_{(F, f_1, \dots, f_n)}^H$  definiert durch

$$X_{(F, f_1, \dots, f_n)}^H := (P_F^3 \circ P_{f_n}^2 \circ \dots \circ P_{f_1}^2 \circ P_F^1)(X).$$

Das Tupel  $(F, f_1, \dots, f_n)$  nennt man eine Lochwanderung von  $X$  und  $X_{(F, f_1, \dots, f_n)}^H$ , die durch die Lochwanderung  $(F, f_1, \dots, f_n)$  entstandene simpliziale Fläche.

Für eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  und eine Lochwanderung  $\sigma_1$  von  $X$  führt man folgende Konstruktion durch:

- $X_{(\sigma_1)}^H := X_{\sigma_1}^H$
- Für eine Lochwanderung  $\sigma_2$  von  $X_{\sigma_1}^H$  ist

$$X_{(\sigma_1, \sigma_2)}^H := (X_{\sigma_1}^H)_{\sigma_2}^H.$$

- Sei nun  $X_{(\sigma_1, \dots, \sigma_i)}^H$  für  $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  und Lochwanderungen  $\sigma_j$  von  $X_{(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1})}^H$  mit  $2 \leq j \leq i$  schon konstruiert und  $\sigma_{i+1}$  eine Lochwanderung von  $X_{(\sigma_1, \dots, \sigma_i)}^H$ , so ist

$$X_{(\sigma_1, \dots, \sigma_{i+1})}^H := (X_{(\sigma_1, \dots, \sigma_i)}^H)_{\sigma_{i+1}}^H.$$

- Für obige Lochwanderungen  $\sigma_i$  und  $n \in \mathbb{N}$  nennt man  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  eine Lochwanderungssequenz von  $X$  und  $X_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}^H$  die durch die Lochwanderungssequenz  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  entstandene simpliziale Fläche.

**Definition 4.7.** Für eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  definiert man die Menge aller simplizialen Flächen, die bis auf Isomorphie durch Anwenden einer Lochwanderungssequenz auf  $X$  entstehen können, als

$$\mathcal{H}_X := \{[X_{\Sigma}^H] \mid \Sigma \text{ ist eine Lochwanderungssequenz von } X\},$$

wobei

$$[Z] := \{Y \mid Y \text{ simpliziale Fläche mit } Y \cong Z\}$$

die Isomorphieklasse einer simplizialen Fläche  $Z$  ist.

**Bemerkung 4.8.** Wegen Bemerkung 4.5 ist es leicht einzusehen, dass es zu einer Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  einer simplizialen Fläche  $(X, <)$  eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma^{-1}$  gibt, sodass  $(X_{\Sigma}^H)_{\Sigma^{-1}}^H \cong X$  ist.

## 4.5 Transitivität der Operation Wanderinghole

Da die Operation Wanderinghole nun definiert ist, kann man nun die Transitivität dieser untersuchen. Zur Vereinfachung des späteren Beweises wird hier zunächst einmal die Beweisidee skizziert und thematisiert, welche Probleme auftreten können.

**Beweisidee 4.9.** Seien  $(X, <)$  und  $(Y, <)$  geschlossene simpliziale Flächen mit  $\chi(X) = \chi(Y) = 2$  und  $X_2 = Y_2 = \{F_1, \dots, F_n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

Ziel ist es,  $X$ , durch wiederholte Anwendung der Operation Wanderinghole, in die simpliziale Fläche  $Y$  zu transformieren. Der Beweis der Transitivität der oben definierten Operation Wanderinghole beruht auf der Idee, die Nachbarschaften der

Flächen in  $X$  durch die Anwendung von Wanderinghole nach und nach zu verändern, um so die Nachbarschaften der Flächen in  $Y$  nachzuahmen. Das heißt, es soll

$$Z_2(Z_1(F)) = Y_2(Y_1(F))$$

für alle  $F \in X_2 = Y_2$  gelten, wobei  $Z = X_{\Sigma}^H$  für eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  ist. Zur Veranschaulichung führt man folgendes Beispiel an. Hierfür wurde das in der Einleitung erwähnte Gap-Paket und die implementierte Operation Wanderinghole verwendet.

Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche, die definiert wird durch

$$\begin{aligned} \omega((X, <)) = & (8, 18, 12; (\{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \\ & \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}), \\ & (\{1, 2, 13\}, \{1, 4, 14\}, \{2, 3, 17\}, \{3, 4, 18\}, \{5, 7, 9\}, \{5, 8, 10\}, \\ & \{6, 7, 12\}, \{6, 8, 13\}, \{9, 11, 15\}, \{10, 11, 17\}, \{12, 14, 16\}, \{15, 16, 18\})). \end{aligned}$$

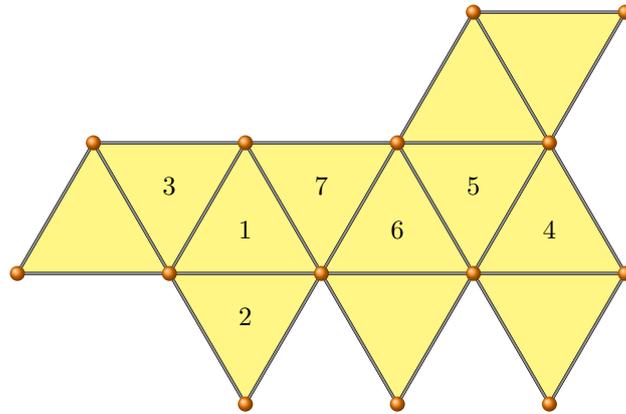


Abbildung 27: simpliziale Fläche

Sei zudem  $(Y, \prec)$  eine simpliziale Fläche, welche durch das folgende ordinale Symbol definiert wird.

$$\begin{aligned} \omega((Y, \prec)) = & (8, 18, 12; (\{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \\ & \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}) \\ & (\{1, 3, 15\}, \{1, 4, 16\}, \{2, 3, 17\}, \{2, 4, 18\}, \{5, 7, 9\}, \{5, 8, 10\}, \\ & \{6, 7, 12\}, \{6, 8, 13\}, \{9, 11, 15\}, \{10, 11, 17\}, \{12, 14, 16\}, \{13, 14, 18\})). \end{aligned}$$

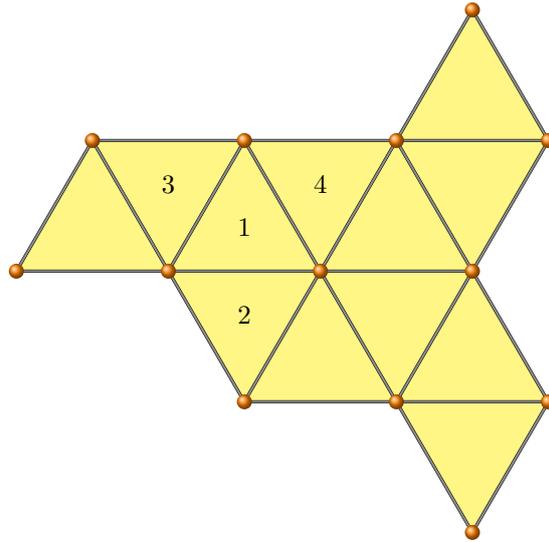


Abbildung 28: simpliziale Fläche

Ziel ist es, wie oben schon erwähnt,  $X$  durch Lochwanderungen in eine simpliziale Fläche  $Z$  umzuformen, die  $N_Y(F) = N_Z(F)$  für alle  $F \in Y_2$  erfüllt. Man betrachte hierzu zunächst die Fläche  $F_1$ . Es gilt zunächst einmal  $X_2(X_1(F_1)) = \{F_1, F_2, F_3, F_8\}$  und  $Y_2(Y_1((F_1))) = \{F_1, F_2, F_3, F_9\}$ . Das heißt, statt  $F_8$ , will man nun  $F_9$  als Nachbarfläche von  $F_1$  haben. Durch die Operation Wanderinghole kann man sich diesem Ziel, jedoch nur stückweise annähern. Man führt deshalb folgende Anwendungen der Operation Wanderinghole aus:

1. Durch Anwendung der Lochwanderung  $(F_9, e_7)$  auf  $X$  erhält man eine simpliziale Fläche  $Z^1$ , in der  $F_7$  und  $F_9$  benachbart sind.

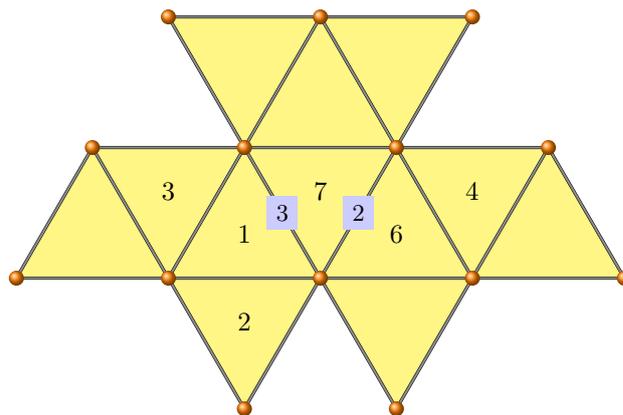


Abbildung 29: Anwendung Wanderinghole auf eine simpliziale Fläche

2. Durch die Anwendung der Operation Wanderinghole mithilfe der Lochwanderung  $(F_9, e_6)$  erhält man eine simpliziale Fläche  $Z^2$ , die  $F_8$  und  $F_9$  als adjazente Flächen enthält.

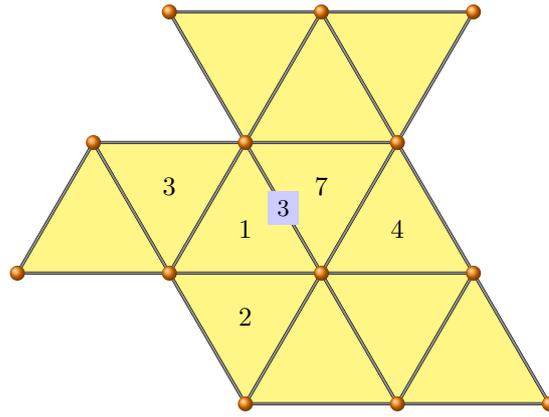


Abbildung 30: Anwendung von Wanderinghole auf eine simpliziale Fläche

3. Durch die Anwendung der Operation mithilfe der Lochwanderung  $(F_9, e_{13})$  ist nun  $Z$  eine simpliziale Fläche mit  $F_1$  und  $F_9$  als benachbarte Flächen.

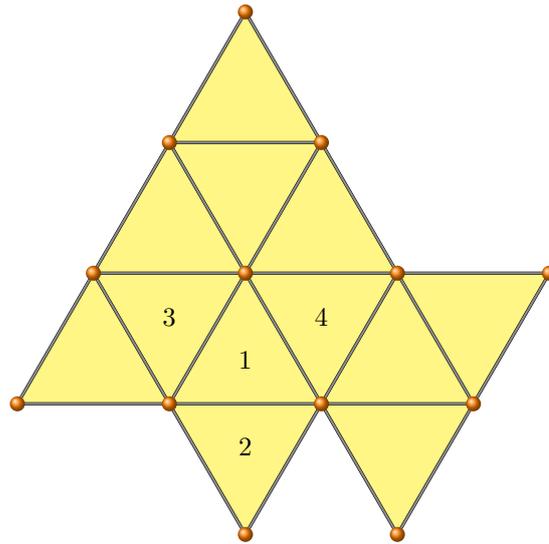


Abbildung 31: Anwendung von Wanderinghole auf simpliziale Fläche

Also ist  $Z' = X_{(F_9, e_7, e_6, e_{13})}^H$  eine wohldefinierte simpliziale Fläche mit der Eigenschaft  $Z'_2(Z'_1(F_1)) = Y_2(Y_1(F_1))$ . Ähnlich soll nun für die restlichen Flächen vorgegangen werden. Das heißt, durch geschickte Anwendung der Operation Wanderinghole entlang eines Pfades, wobei der Begriff eines Pfades in einer simplizialen Fläche in diesem Kapitel noch definiert wird, soll nun nach und nach eine Fläche entstehen, die der simplizialen Fläche immer mehr ähnelt.

Dies wirft einige Fragen auf.

- Ist es immer möglich in  $X$  die Nachbarschaften aus der simplizialen Fläche  $Y$  nachzuahmen?

- Können durch das Anwenden von Lochwanderungssequenzen auf  $X$  schon erfolgreich konstruierte Nachbarschaften zerstört werden?
- Ist es immer möglich die Operation Wanderinghole wie oben skizziert entlang eines Pfades anzuwenden?

Falls sich die obigen Fragen bewahrheiten, bleibt immer noch die Frage der Isomorphie der konstruierten simplizialen Fläche  $Z$  und der simplizialen Fläche  $Y$  zu klären. Diese Fragestellungen sollen im Folgenden behandelt werden, um so die Transitivität der Operation Wanderinghole nachzuweisen. Hierzu ist jedoch noch etwas Vorarbeit nötig.

Zunächst einmal werden die Begriffe einer stark-zusammenhängenden und einer Jordan-zusammenhängenden Menge eingeführt.

**Definition 4.10.** 1. Sei  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche. Ein Flächenpfad von  $S \in X_2$  nach  $T \in X_2$  in  $X$  ist eine Sequenz  $(F_1 := S, F_2, \dots, F_k := T)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $F_i$  und  $F_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k-1$  benachbarte Flächen in  $X$  sind.[1]

2. Man nennt eine Menge  $M \subseteq X_2$  stark-zusammenhängend, falls für beliebige  $S, T \in M$  ein Flächenpfad  $(F_1 := S, F_2, \dots, F_k := T)$  mit  $F_i \in M$  für  $1 \leq i \leq k$  existiert.

3. Die stark-zusammenhängenden Mengen  $M \subseteq X_2$  nennt man Zusammenhangskomponenten von  $X$ , sofern diese folgende Bedingung erfüllen: Falls ein  $M \subseteq M'$  existiert, sodass  $M'$  stark-zusammenhängend in  $X$  ist, so gilt schon  $M' = M$ . [1]

4. Man nennt die Menge  $M \subseteq X_2$  Jordan-zusammenhängend in  $X$ , falls  $M = X_2$  stark-zusammenhängend ist oder  $M \subsetneq X_2$  gilt und die Mengen  $M$  und  $X_2 \setminus M$  stark-zusammenhängend sind. Falls  $X_2$  stark zusammenhängend ist, so nennt man die simpliziale Fläche  $(X, <)$  Jordan-zusammenhängend.

An dieser Stelle kann man auch den Begriff einer zusammenhängenden Menge einführen. Da jedoch zusammenhängende Mengen für diesen Untersuchungsaspekt nicht von Relevanz sind, bleibt dies an dieser Stelle aus.

**Bemerkung 4.11.** Seien  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche und  $S, T \in X_2$  Flächen in  $X$ . Falls ein  $S$ - $T$ -Weg etwa  $(S, F_1, \dots, F_n, T)$  für  $F_1, \dots, F_n \in X_2$  und  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so existiert auch ein  $S$ - $T$ -Weg ohne Flächenwiederholung. Das heißt, es existieren paarweise verschiedene  $F'_1, \dots, F'_k \in X_2$  für  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $(S, F'_1, \dots, F'_k, T)$  ebenfalls ein  $S$ - $T$ -Weg in  $X$  ist.

**Beispiel 4.12.** • Sei  $J$  der Janus-Kopf. Dann ist die Flächenmenge von  $J$  gegeben durch  $J_2 = \{F_1, F_2\}$  und die Mengen  $\{F_1\}, \{F_2\}$  und  $\{F_1, F_2\}$  sind Jordan-zusammenhängende Mengen in  $J$ .

- Für eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche  $(X, <)$  mit  $\chi(X) = 2$  bildet  $\{F\}$  für ein  $F \in X_2$  stets eine Jordan-zusammenhängende Menge.
- Sei  $T$  das zuvor definierte Tetraeder. Sei  $\emptyset \subsetneq M \subseteq T_2$ . So bildet  $M$  eine Jordan-zusammenhängende Menge.
- Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $X = n\Delta$ . Dann existiert kein  $M \subseteq X_2$ , sodass  $M$  Jordan-zusammenhängend ist. Denn die Menge  $M = X_2$  ist klarerweise nicht stark-zusammenhängend. Und falls  $M \subsetneq X_2$  ist, dann besteht eine der Mengen  $M$  und  $X_2 \setminus M$  aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Damit ist  $M$  nicht Jordan-zusammenhängend.
- Seien nun  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche und  $M \subseteq X_2$  eine Jordan-zusammenhängende Menge in  $X$ . Dann gilt dies auch für  $X_2 \setminus M$ .

**Lemma 4.13.** Sei  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche und  $e \in X_1$  eine Kante in  $X$ . Falls  $\deg(V) = 2$  für alle  $V \in X_1(e)$  ist, dann ist  $X \cong J$ , wobei  $J$  der Janus-Kopf ist.

*Beweis.* Sei  $X_0(e) = \{V_1, V_2\}$  für Knoten  $V_1, V_2 \in X_0$ . Dann existieren  $F_1, F_2 \in X_2$  mit  $X_2(V_1) = \{F_1, F_2\}$ . Da  $\deg(V_1) = 2$  ist und  $|X_2(e) \cap X_2(V_1)| = 2$  wegen der Geschlossenheit von  $X$  gelten muss, folgt  $X_2(e) = \{F_1, F_2\}$  und somit auch  $X_2(V_2) = \{F_1, F_2\}$ . Angenommen es gilt  $\deg(V_3) \neq 2$  für den Knoten  $V_3 \in X_0(F_1)$ . Da  $\deg(V_3) = 1$  aufgrund der Geschlossenheit der simplizialen Fläche nicht möglich ist, reicht es, den Fall  $\deg(V_3) \geq 3$  zu widerlegen. Falls  $\deg(V_3) \geq 3$  ist, existiert, da  $X$  geschlossen ist, ein  $F_i \neq F \in X_2$ , sodass  $V_3 < F$  und  $X_0(\tilde{e}) = \{V_1, V_3\}$  für  $\tilde{e} \in X_1(F)$  und  $i = 1, 2$  ist. Wegen  $V_1 < \tilde{e}$  und  $\tilde{e} < F_1$  folgt  $V_1 < F$  und damit auch  $\deg(V_1) = |X_2(V_1)| \geq |\{F, F_1, F_2\}| = 3$ . Der Fall  $X_0(\tilde{e}) = \{V_2, V_3\}$  wird analog behandelt. Also ist  $M = \{F_1, F_2\}$  eine Zusammenhangskomponente von  $X$  und wegen des starken Zusammenhangs auch die einzige. Also erhält man  $X_2 = \{F_1, F_2\}$ . Da es bis auf Isomorphie nur eine simpliziale Fläche mit 2 Flächen gibt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 4.14.** Sei  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche mit  $|X_2| > 2$ . Dann ist  $\mathcal{W}_F(X) \neq \emptyset$  für alle  $F \in X_2$ .

*Beweis.* Sei  $F \in X_2$  eine beliebige Fläche in  $X$ . Dann gilt aufgrund der Geschlossenheit von  $X$ , dass  $\deg(V) \geq 2$  für alle  $V \in X_0(F)$  ist. Und wegen Lemma 4.13

existiert ein  $V_F \in X_0(F)$  mit  $\deg(V_F) > 2$ . Das heißt, es existieren  $F_1, \dots, F_n$ , sodass  $(F, F_1, \dots, F_n)$  für  $n \geq 2$  den zu  $V_F$  gehörigen Schirm bildet. Somit existieren Kanten  $e_1, e_2 \in X_1$ , sodass  $X_2(e_1) = \{F, F_1\}$  und  $X_2(e_2) = \{F_1, F_2\}$  ist. Dann gilt aber schon  $e_2 \in \mathcal{W}_F(X)$  und damit ist  $\mathcal{W}_F(X) \neq \emptyset$ .  $\square$

Um die Knoten, Kanten und Flächen einer Jordan-zusammenhängenden Menge von denen des Komplements in  $X$  unterscheiden zu können, färbt man den Graphen, wie in folgender Definition beschrieben.

**Definition 4.15.** Für eine simpliziale Fläche  $(X, <)$  und eine Jordan-zusammenhängende Menge  $M$  definiert man die Abbildung  $f_M^X : X \mapsto \{0, 1\}$ , welche durch

$$f_M^X(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \cup X_0(M) \cup X_1(M) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Die Abbildung  $f_M^X$  nennt man eine Färbung von  $X$  und  $(X, <, f_m^X)$  eine gefärbte simpliziale Fläche. Falls die simpliziale Fläche  $X$  aus dem Kontext heraus klar ist, so schreibt man nur  $f_M$ .

**Beispiel 4.16.** • Für eine Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche  $(X, <)$  ist die Färbung  $f_{X_2}$  gegeben durch  $f_{X_2}(x) = 1$  für alle  $x \in X$ .

- Für den Janus-Kopf  $J$  bildet  $M_J = \{F_1\}$  eine Jordan-zusammenhängende Menge. Damit ist  $f_{M_J}$  gegeben durch

$$f_{M_J}(x) = \begin{cases} 0 & x = F_2 \\ 1 & \text{falls } x \in X \setminus \{F_2\}. \end{cases}$$

- Für eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche  $(X, <)$  mit  $\chi(X) = 2$  bildet  $M = \{F\}$  für ein  $F \in X_2$  eine Jordan-zusammenhängende Menge. Dann ist  $f_M(F) = 1$  und  $f_M(x) = 0$  für alle  $x \in X \setminus \{F\}$ .
- Für das Tetraeder,  $T$  wie in Abbildung 14 definiert, bildet  $M_T = \{F_3, F_4\}$  eine Jordan-zusammenhängende Menge. Dadurch erhält man die Färbung  $f_{M_T}$  gegeben durch

$$f_{M_T}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \{e_2, F_1, F_2\} \\ 1 & \text{falls } x \in X \setminus \{e_2, F_1, F_2\}. \end{cases}$$

**Bemerkung 4.17.** In Abbildungen wird die Färbung wie folgt realisiert: Alle Elemente einer simplizialen Fläche, die durch die Färbung auf 1 abgebildet werden, werden in den folgenden Abbildungen in grau dargestellt und die Urbilder von 0 bleiben unverändert. Dies wird noch am obigen Beispiel des Tetraeders verdeutlicht.

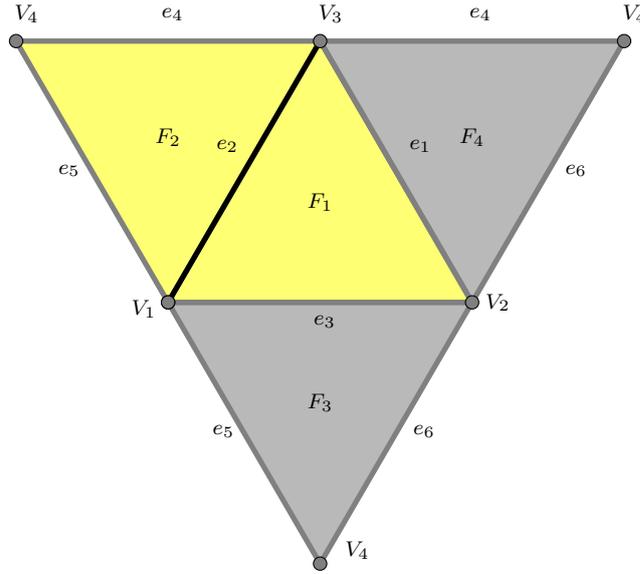


Abbildung 32: Tetraeder

**Lemma 4.18.** *Seien  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche und  $M \subseteq X_2$  eine Jordan-zusammenhängende Teilmenge der Flächen. Seien zusätzlich  $V \in X_0$  ein Knoten in  $X$  und  $(F_1, \dots, F_n)$  für Flächen  $F_1, \dots, F_n \in X_2$  und  $n \in \mathbb{N}$  der zu  $V$  gehörige Schirm. Falls  $f_M(V) = 0$  ist, dann gilt  $f_M(F_1) = \dots = f_M(F_n) = 0$ .*

*Beweis.* Angenommen die obige Behauptung stimmt nicht. Dann ist  $f_M(V) = 0$ , aber es existiert ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $f_M(F_j) = 1$ . Dann gilt aber auch nach Definition der Färbung  $f_M(x) = 1$  für alle  $x \in X_0(F_j) \cup X_1(F_j)$ . Da  $(F_1, \dots, F_j, \dots, F_n)$  der zu  $V$  gehörige Schirm ist, ist somit auch  $V \in X_0(F_j)$ . Dadurch erhält man  $f_M(V) = 1$  und somit auch den gewünschten Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung 4.19.** *Es ist nach obigem Lemma leicht einzusehen, dass die Färbung der simplizialen Fläche transitiv im folgendem Sinne ist:*

*Sei  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche und die Menge  $M \subseteq X_2$  eine Jordan-zusammenhängende Teilmenge der Flächen. Seien zudem  $F \in X_2$  eine Fläche,  $e \in X_1(F)$  eine Kante und  $V \in X_0(e)$  ein Knoten in  $X$ . Dann gilt die Implikation*

$$f_M(V) = 0 \Rightarrow f_M(e) = 0 \Rightarrow f_M(F) = 0.$$

Um die Nachbarn einer Fläche in einer simplizialen Fläche besser spezifizieren zu können, führt man folgende Definition ein.

**Definition 4.20.** *Seien  $(X, <)$  eine simpliziale Fläche und  $M \subseteq X_2$  eine Menge. Dann ist die Menge  $N_M^X(F)$  für  $F \in X_2$  definiert durch*

$$N_M^X(F) := \{F' \in M \mid F' \text{ und } F \text{ sind adjazent}\}.$$

Falls  $M = X_2$  ist, so definiert man auch  $N_X^X(F) := N_{X_2}^X(F)$ . Ist  $X$  aus dem Kontext klar, so schreibt man  $N_M^X(F) := N_M(F)$ . Für  $S \subseteq X_2$  ist

$$N_M(S) := \bigcup_{F \in S} N_M(F).$$

**Bemerkung 4.21.** Sei  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche. Dann gilt  $|N_X(F)| \in \{2, 3\}$  für alle  $F \in X_2$ .

**Lemma 4.22.** Seien  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche und  $M \subsetneq X_2$  eine Jordan-zusammenhängende Menge. Dann existiert ein  $F \in X_2 \setminus M$  so, dass die Menge  $M \cup \{F\}$  Jordan-zusammenhängend ist.

*Beweis.* Man betrachte eine Fläche  $F \in X_2 \setminus M$ , Kanten  $e_i \in X_1$  und Knoten  $V_i \in X_0$  mit  $e_i < F$  und  $V_i < e_j$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ . Für den Beweis macht man nun Gebrauch von der Färbung  $f_M$ .

- Falls  $f_M(x) = 1$  für  $x \in \{V_1, V_2, V_3, e_1, e_2, e_3\}$  und  $f_M(F) = 0$  ist, so gilt schon  $M = X_2 \setminus \{F\}$ . Denn angenommen  $|X_2 \setminus M| > 1$ , dann existiert ein  $F' \neq F \in X_2 \setminus M$  und somit, da  $X_2 \setminus M$  stark-zusammenhängend ist, auch ein  $F$ - $F'$ -Weg etwa  $(F, F_1, \dots, F')$  in  $X_2 \setminus M$ . Da aber  $f_M(e_1) = f_M(e_2) = f_M(e_3) = 1$  ist, gilt  $f_M(F') = 1$  für alle  $F' \in N_X(F)$  und ist dann auch  $F_1 \in M$ . Daraus kann man schon schließen, dass  $X_2 \setminus M$  nicht stark-zusammenhängend ist, was den gewünschten Widerspruch liefert. Also ist  $M = X_2 \setminus \{F\}$  und  $M \cup \{F\} = X_2$  ist dann nach Voraussetzung Jordan-zusammenhängend.

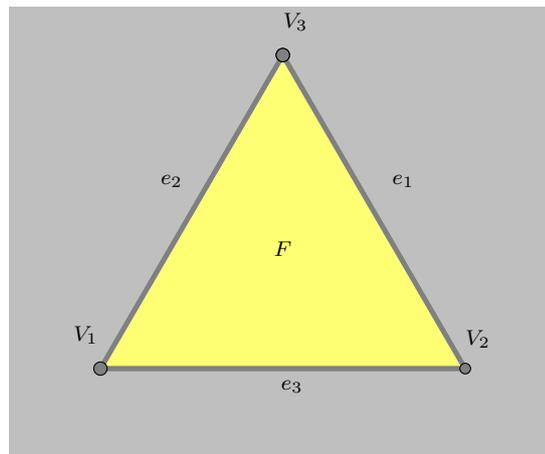


Abbildung 33: Ausschnitt gefärbte simpliziale Fläche

- Falls  $F$  eine Fläche mit der Eigenschaft  $f_M(x) = 1$  für  $x \in \{V_1, V_2, V_3, e_1, e_2\}$  und  $f_M(F) = f_M(e_3) = 0$  ist, so lässt sich zeigen, dass  $M \cup \{F\}$  Jordan-zusammenhängend ist. Man zeigt zunächst den Zusammenhang von  $M \cup \{F\}$ . Es reicht zu zeigen, dass es  $F$ - $T$ -Wege in  $M \cup \{F\}$  für ein beliebiges  $T \in M$

gibt. Wegen  $f(e_1) = 1$  existiert ein  $F' \in M$  mit  $e_1 < F'$ . Für den Fall  $T = F'$  liefert der Weg  $(F, F')$  die Behauptung. Betrachte nun  $T \neq F, F'$ . Da  $M$  stark-zusammenhängend ist, existiert ein  $F'-T$ -Weg etwa  $(F', F_1, \dots, F_n, T)$  in  $M$ , welcher sich zu einem  $F-T$ -Weg etwa  $(F, F', F_1, \dots, F_n, T)$  erweitern lässt. Also ist  $M \cup \{F\}$  stark-zusammenhängend. Bleibt nur noch nachzuweisen, dass  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$  stark-zusammenhängend ist. Sei dazu  $(S, F_1, \dots, F_n, T)$  ein  $S-T$ -Weg in  $X_2 \setminus M$  für beliebige  $S, T \in X_2 \setminus (M \cup \{F\})$ . Für  $F_i \neq F$  mit  $1 \leq i \leq n$  ist  $(S, F_1, \dots, F_n, T)$  ebenfalls ein  $S-T$ -Weg in  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$ . Sei also  $F_i = F$  für ein  $1 < i < n$ . Dann gilt wegen  $|N_{X_2 \setminus M}(F)| = 1$  schon  $F_{i-1} = F_{i+1}$  und somit kann man den  $S-T$ -Weg  $(S, F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+2}, \dots, F_n, T)$  in  $X_2 \setminus M$  durch Weglassen von  $F = F_i$  und  $F_{i+1}$  konstruieren. Dabei setzt man zur Vereinfachung  $F_{n+1} := T$ . Da  $F_j \neq F$  für  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$  gilt, ist  $(S, F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+2}, \dots, F_n)$  ein  $S-T$ -Weg in  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$ . Also ist  $M$  Jordan-zusammenhängend. Obige Konstruktion eines Weges in  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$  kann man auch für  $F_1 = F$  oder  $F_n = F$  durchführen.

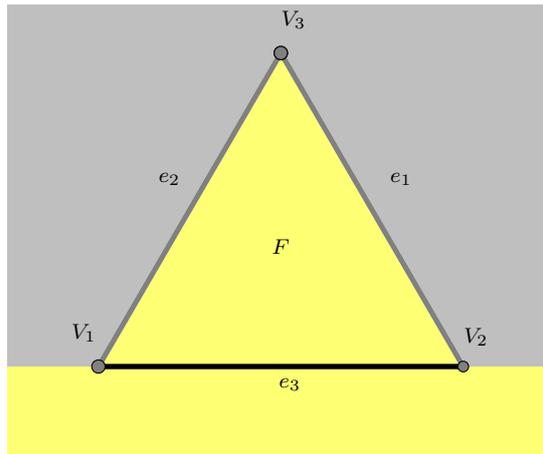


Abbildung 34: Ausschnitt gefärbte simpliziale Fläche

- Falls  $F$  eine Fläche mit der Eigenschaft  $f_M(x) = 0$  für  $x \in \{F, e_1, e_2, V_3\}$  und  $f_M(y) = 1$  für  $y \in \{V_1, V_2, e_3\}$  ist, so ist die Menge  $M \cup \{F\}$  eine Jordan-zusammenhängende Menge. Den starken Zusammenhang von  $M \cup \{F\}$  kann man mit analoger Argumentation wie im obigen Fall nachweisen. Es bleibt wieder der Zusammenhang der Menge  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$  zu zeigen. Diese Behauptung gilt, denn wegen  $f_M(V_3) = 0$  existieren nach Lemma 4.18  $F_1, \dots, F_n \in X_2 \setminus M$  mit  $V_3 < F_i$  für  $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$  so, dass das Tupel  $(F, F_1, \dots, F_n)$  einen Schirm bildet. Sei also für  $n' \in \mathbb{N}$  das Tupel  $(S, F'_1, \dots, F'_{n'}, T)$  ein  $S-T$ -Weg in  $X_2 \setminus M$ , wobei  $S, T, F'_i \in X_2 \setminus M$  und  $S \neq T \neq F$  sind. Falls  $F'_i \neq F$  für  $1 \leq i \leq n'$  ist, so ist  $(S, F'_1, \dots, F'_{n'}, T)$  ebenfalls ein  $S-T$ -Weg in  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$ . Sei also nun  $F'_i = F$  für ein  $1 < i < n$ . Da  $f_M(V_3) =$

$f_M(e_1) = f_M(e_2) = 0$  ist, folgt  $f_M(F_{i-1}) = f_M(F_{i+1}) = 0$ . Außerdem kann man aus  $F'_{i-1}, F'_{i+1} \in X_2(V_3)$  und der Adjazenz von  $F'_{i-1}$  und  $F'_{i+1}$  zu der Fläche  $F$  schließen, dass  $(F'_{i-1}, F'_{i+1}) \in \{(F_1, F_1), (F_1, F_n), (F_n, F_1), (F_n, F_n)\}$  gelten muss. Falls  $(F'_{i-1}, F'_{i+1}) \in \{(F_1, F_1), (F_n, F_n)\}$  ist, so lässt sich dies wie im oben behandelten Fall lösen, indem man im  $S$ - $T$ -Weg die doppelt überlaufene Fläche  $F_{i-1} = F_{i+1}$  und die Fläche  $F$  weglässt. Falls  $(F'_{i-1}, F'_{i+1}) = (F_1, F_n)$  ist, dann bildet  $(S, F'_1, \dots, F'_{i-1} = F_1, F_2, \dots, F'_{i+1} = F_n, \dots, F'_n, T)$  einen  $S$ - $T$ -Weg in  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$  und für den anderen Fall ist  $(S, F'_1, \dots, F'_{i-1} = F_n, F_{n-1}, \dots, F'_{i+1} = F_1, \dots, F'_n, T)$  der gesuchte Weg, der  $S$  und  $T$  verbindet. Obige Konstruktion eines Weges in  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$  kann man auch für  $F'_1 = F$  oder  $F'_n = F$  durchführen.

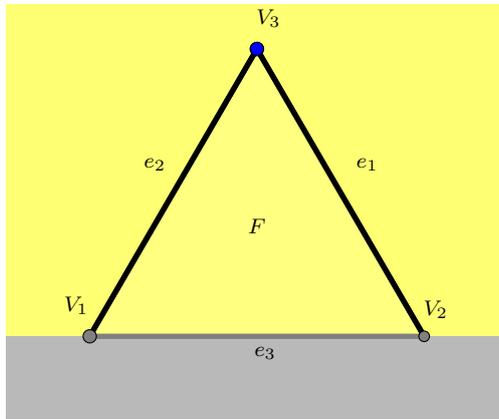


Abbildung 35: Ausschnitt gefärbte simpliziale Fläche

Angenommen keiner der obigen Fälle tritt ein, das heißt, für  $n_1 := |\{e < F \mid f_M(e) = 1\}|$  und  $n_2 := |\{V < F \mid f_M(V) = 1\}|$  gilt  $(n_1, n_2) \notin \{(3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ . Da  $X_2$  stark-zusammenhängend und  $M \subsetneq X_2$  ist, existiert ein  $F_1 \in X_2 \setminus M$  und  $f_1 \in X_1$  mit  $f_1 < F_1$  und  $f_M(f_1) = 1$ . Dann ist  $M \cup \{F_1\}$  stark-zusammenhängend. Falls  $M \cup \{F_1\}$  Jordan-zusammenhängend ist, so ist die Behauptung gezeigt. Falls dies nicht der Fall ist, dann zerfällt  $X_2 \setminus (M \cup \{F_1\})$  ohne Einschränkung in genau zwei Zusammenhangskomponenten. Seien also  $Z^{(1,1)}$  und  $Z^{(1,2)}$  die Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus (M \cup \{F_1\})$ . Dann gilt  $1 \leq |Z^{(1,1)}|$ ,  $|Z^{(1,2)}| < |X_2 \setminus M|$  und man definiert  $N^1 := Z^{(1,1)}$ . Klarerweise ist  $N^1$  stark-zusammenhängend in  $X_2$ . Man konstruiert sich nun eine absteigende Kette von stark-zusammenhängenden Teilmengen von  $X_2 \setminus M$  wie folgt: Sei  $N^i$  für  $i \in \mathbb{N}$  schon mithilfe von  $F_i \in X_2 \setminus M$  konstruiert. Falls  $|N^i| > 2$  ist, so betrachtet man die Menge  $N^i \setminus \{F_{i+1}\}$  für ein  $F_{i+1} \in N^i$  mit  $e_{i+1} < F_{i+1}$  und  $f_M(e_{i+1}) = 1$ , wobei  $e_{i+1} \in X_1$  ist. Falls  $N^i \setminus \{F_{i+1}\}$  stark-zusammenhängend ist, dann ist man fertig, da dann  $X_2 \setminus (M \cup \{F_{i+1}\})$  ebenfalls stark-zusammenhängend ist. Falls jedoch  $N^i \setminus \{F_{i+1}\}$  in zwei Zusammenhangskomponenten  $Z^{(i+1,1)}$  und  $Z^{(i+1,2)}$  zerfällt, so definiert man  $N^{i+1} = Z^{(i+1,j)}$  für das

$j \in \{1, 2\}$  mit der Eigenschaft, dass  $F_i \notin N_{X_2}(F)$  für alle  $F \in Z^{(i+1,j)}$  gilt. Offensichtlich ist  $N^{i+1}$  stark-zusammenhängend und es gilt  $|N^i| > |N^{i+1}|$ . Dadurch erhält man die Kette  $|N^1| > |N^2| > \dots$ . Da  $|X_2| < \infty$  ist, muss nach endlich vielen Schritten der Fall  $|N^k| \in \{1, 2\}$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  eintreten.

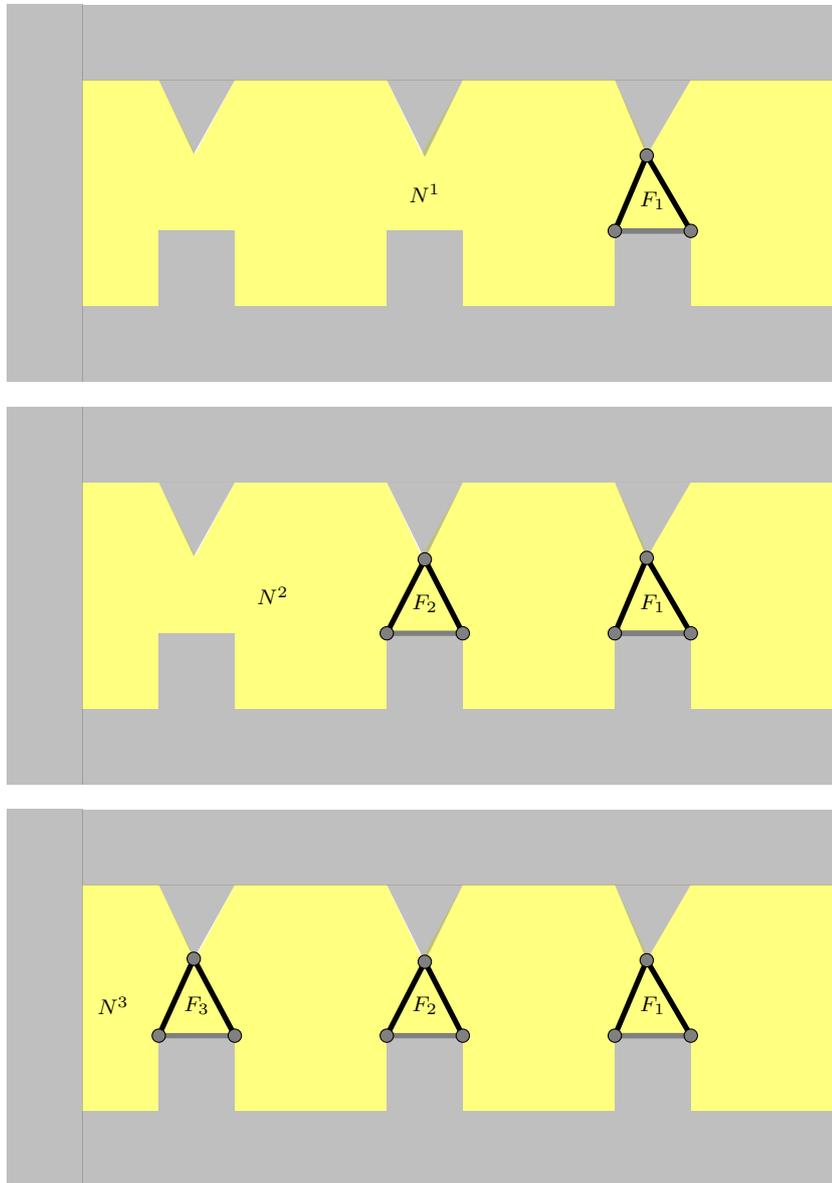


Abbildung 36: Konstruktion der stark-zusammenhängenden Teilmengen

- Falls  $|N^k| = 1$  ist, so ist  $N_{N^{k-1}}(F) = \{F_{k-1}\}$  für  $N^k = \{F\}$ . Also ist  $|\{e < F \mid f_M(e) = 1\}| = 2$  und damit auch  $|\{V \in X_0(F) \mid f_M(V) = 1\}| = 3$  und dies ist ein Widerspruch zur oben getroffenen Annahme.
- Falls  $|N^k| = 2$  ist, so ist  $|N_{N^{k-1}}(F')| = 1$  für ein  $F' \in N^k$  und damit erhält man wieder den gewünschten Widerspruch.

□

**Bemerkung 4.23.** Die Idee des obigen Beweises durch die geschickte Wahl von Flächen in einer simplizialen Fläche, eine stark-zusammenhängende Menge auf stark-zusammenhängende Teilmengen einzuschränken, soll in der Abbildung 36 angedeutet werden.

**Lemma 4.24.** Seien  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche und  $(S, F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1} := T)$  für  $n \geq 1$  ein  $S$ - $T$ -Weg in  $X$  ohne Flächenwiederholung, wobei  $F_i \in X_2$  und  $1 \leq i \leq n$  ist und  $S, T \in X_2$  zwei nicht benachbarte Flächen sind. Dann existiert eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  so, dass  $(S, F_2, \dots, F_n, T)$  ein  $S$ - $T$ -Weg ohne Flächenwiederholung in  $X_\Sigma^H$  ist.

*Beweis.* Für den Beweis dieser Aussage unterscheidet man drei Fälle, denn falls  $S$  zu einem Knoten vom Grad zwei gehört, sind Lochwanderungen nur eingeschränkt möglich.

1. Sei also  $(S, F_1, \dots, F_n, T)$  für  $n \geq 1$  ein  $S$ - $T$ -Weg, wie zuvor beschrieben. Angenommen es existiert kein Knoten  $V \in X_0$  mit  $X_2(V) = \{S, F_1\}$ . Dann ist  $\deg(V) \geq 3$  für alle  $V \in X_0$  und es existieren Kanten  $e_1, e_2 \in X_1$  mit  $X_2(e_1) = \{S, F_1\}$  und  $X_2(e_2) = \{F_1, F_2\}$ , sodass  $e_2 \in \mathcal{W}_F(X)$  ist und die Operation Wanderinghole mithilfe des Tupels  $(S, e_2)$  anwendbar ist. Denn per Konstruktion ist  $e_1 \notin X_1(S)$  und  $|X_0(e_1) \cap X_0(S)| = 1$ . Dadurch erhalten wir die simpliziale Fläche  $X_{(S, e_1)}^H$ , in welcher  $S$  und  $F_2$  benachbart sind.

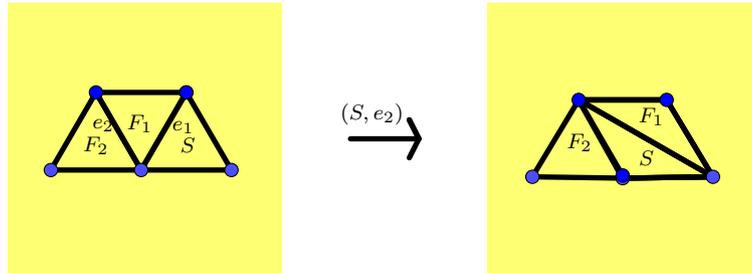


Abbildung 37: Anwendung von Wanderinghole

2. Angenommen es existiert ein Knoten  $V \in X_0$ , sodass  $X_2(V) = \{S, F_1\}$  ist. Dann ist  $\deg(V) = 2$  und  $F_1$  ist adjazent zu  $F_2$ , deshalb existiert eine Kante  $e \in X_1$  mit  $X_2(e) = \{F_1, S\}$ , sodass mithilfe des Tupels  $(F_2, e)$  die Operation Wanderinghole anwendbar ist. In  $Y = X_{(F_2, e)}^H$  sind  $S$  und  $F_2$  adjazent und dann existiert also ein Knoten  $V' \in Y_0$  mit  $Y_2(V') = \{S, F_1, F_2\}$ . Also ist  $X_\Sigma^H$  eine simpliziale Fläche, in der  $(S, F_2, \dots, F_n)$  ein  $S$ - $T$ -Weg ohne Flächenwiederholung ist, wobei  $\Sigma$  eine Lochwanderungssequenz ist.

□

**Bemerkung 4.25.** *Induktiv kann also aus dem  $S$ - $T$ -Weg  $(S, F_1, \dots, F_n, T)$  durch die Anwendung der Operation Wanderinghole mithilfe einer Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  eine Fläche  $X_\Sigma^H$  konstruiert werden, in welcher  $S$  und  $T$  benachbart sind.*

**Vorüberlegung 4.26.** *Seien  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche und  $M \subseteq X_2$  eine Jordan-zusammenhängende Menge so, dass Flächen  $F_1, F_2 \in X_2 \setminus M$ ,  $F'_1, F'_2 \in M$  und Kanten  $e, e_1, e_2 \in X_1$  mit  $X_2(e) = \{F_1, F_2\}$ ,  $X_2(e_1) = \{F_1, F'_1\}$  und  $X_2(e_2) = \{F_2, F'_2\}$  existieren.*

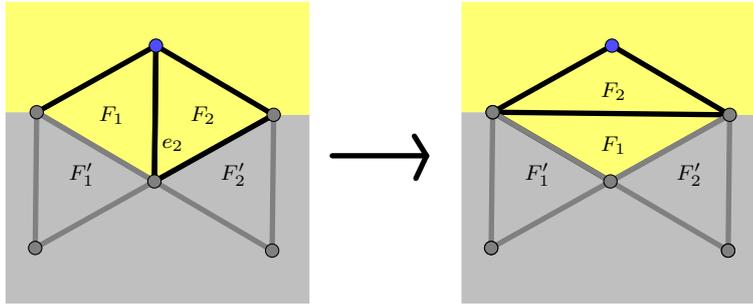


Abbildung 38: Anwendung von Wanderinghole

Damit ist die simpliziale Fläche  $Y = X_{(F_1, e_2)}$  wohldefiniert und es gilt  $N_M^Y(F'_i) = N_M^X(F'_i)$  für  $i = 1, 2$ .

Hiermit soll angedeutet werden, dass für eine Lochwanderung  $(F, f)$ , wobei  $F \in X_2 \setminus M$  und  $f \in X_2(\tilde{F})$  für ein  $\tilde{F} \in X_2 \setminus M$  ist, die Gleichheit  $N_M^Z(F') = N_M^X(F')$  für alle  $F' \in M$  gilt. Hierbei ist  $Z = X_{(F, f)}^H$ .

**Lemma 4.27.** *Seien  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche mit  $\chi(X) = 2$ ,  $M \subsetneq X_2$  eine Jordan-zusammenhängende Teilmenge der Flächen und  $F \in X_2 \setminus M$  eine Fläche in  $X$ . Dann existiert eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  so, dass  $M \cup \{F\}$  Jordan-zusammenhängend in  $X_\Sigma^H$  ist.*

*Beweis.* Sei  $F_M \in M$  eine Fläche in  $M$  so, dass  $F_M$  adjazent zu einem  $F' \in X_2 \setminus M$  ist. Da  $X_2 \setminus M$  stark-zusammenhängend ist, existiert ein  $F$ - $F'$ -Weg in  $X_2 \setminus M$  ohne Flächenwiederholung und damit auch ein  $F$ - $F_M$ -Weg in  $X$ . Wegen Lemma 4.24 und Bemerkung 4.25 existiert also eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$ , sodass  $F_M$  und  $F$  in  $Y = X_\Sigma^H$  benachbart sind. Also ist  $M \cup \{F\}$  stark zusammenhängend in  $X$ . Deshalb bleibt nur noch der Zusammenhang von  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$  zu betrachten. Falls stark-zusammenhängend  $Y$  ist, so ist die Behauptung gezeigt. Falls dies nicht der Fall ist, so muss nach Vorüberlegung 4.26 eine Fläche  $\tilde{F} \in M$  existieren, die  $X_2 \setminus M$  in zwei Zusammenhangskomponenten aufspaltet. Das heißt,  $X_2 \setminus M \cup \{\tilde{F}\}$  ist nicht

mehr stark zusammenhängend. Somit gilt aber  $|N_{X_2 \setminus M}(\tilde{F})| = 2$ . Also existieren zu  $\tilde{F}$  adjazente  $F_1, F_2 \in X_2$ , die  $f_M(F_1) = f_M(F_2) = 0$  erfüllen. Desweiteren existieren  $e_1, e_2 \in Y_1$  mit  $X_2(e_1) = \{F_2, \tilde{F}\}$  und  $X_2(e_2) = \{F_1, \tilde{F}\}$ .

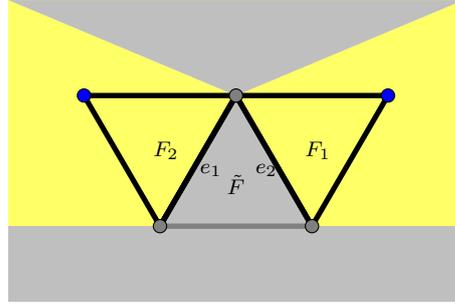


Abbildung 39: trennende Fläche in einer simplizialen Fläche

Damit ist  $Y_{(F_1, e_1)}$  eine simpliziale Fläche, in der  $F_1, F_2$  adjazent zueinander sind und dadurch erhält man den Zusammenhang von  $X_2 \setminus (M \cup \{F\})$ . Nach Vorüberlegung 4.26 bleibt der Zusammenhang der Menge  $M \cup \{F\}$  trotz der letzten Lochwanderung erhalten.  $\square$

**Vorüberlegung 4.28.** Seien  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche,  $V \in X_0$  ein Knoten und  $F_1, \dots, F_n \in X_2$  Flächen in  $X$  so, dass  $(F_1, \dots, F_n)$  den zu  $V$  gehörigen Schirm bildet. Sei außerdem  $1 \leq j < k \leq n$  für  $j, k \in \mathbb{N}$ . Falls  $F_i = F_j$  und  $F_{i+1} = F_k$  für ein  $1 \leq i < n$  oder  $F_1 = F_j$  und  $F_n = F_k$  gilt, so sind  $F_j$  und  $F_k$  bereits benachbarte Flächen. Andernfalls bildet  $(F_j, F_{j+1}, \dots, F_k)$  einen  $F_j$ - $F_k$ -Weg in  $X_2$ . Für  $F_j$  und  $F_{j+1}$  existiert eine Kante  $f \in X_1$  mit  $f < F_{i+1}$  und  $f \not< F_j, F_{j+2}$ . Damit ist  $f \in \mathcal{W}_{F_j}(X)$  und  $X_{(F_j, f)}^H$  ist eine simpliziale Fläche mit einem Knoten  $V' \in X_{(F_j, f)}^H$  so, dass  $(F_1, \dots, F_j, F_{j+2}, \dots, F_n)$  der zu  $V'$  gehörige Schirm ist. Induktiv erhält man also durch eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  eine simpliziale Fläche  $X_\Sigma^H$ , in der es einen Knoten  $\tilde{V} \in (X_\Sigma^H)_0$  gibt, sodass  $(F_1, \dots, F_j, F_k, \dots, F_n)$  der zu  $\tilde{V}$  gehörige Schirm ist.

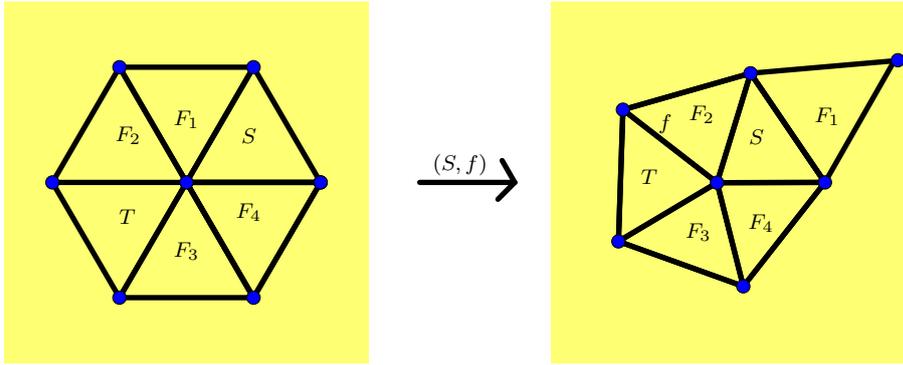


Abbildung 40: Anwendung von Wanderinghole an Schirm

**Satz 4.29.** Sei  $(X, \prec)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche. Dann ist die Anwendung von Wanderinghole auf  $X$  transitiv, das heißt, für alle geschlossenen Jordan-zusammenhängenden simplizialen Flächen  $(Y, \prec)$ , die keine Knoten vom Grad 2 enthalten, wobei  $|X_2| = |Y_2|$  und  $\chi(X) = \chi(Y) = 2$  ist, existiert eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  mit  $X_\Sigma^H \cong Y$ .

*Beweis.* Sei  $S := \{[X^1], \dots, [X^m]\}$  die Menge aller Isomorphieklassen mit  $|X_2^i| = n \in \mathbb{N}$  und  $\chi(X^i) = \chi(X^j)$  für  $1 \leq i, j \leq m \in \mathbb{N}$ . Das heißt, falls  $X$  eine simpliziale Fläche mit  $|X_2| = n$  und  $\chi(X) = \chi(X^1)$  ist, dann folgt schon  $X \in [X^j]$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Seien also  $X \in [X^i]$  und  $Y \in [X^j]$  für  $1 \leq i, j \leq m$  zwei Vertreter der Äquivalenzklassen mit  $X_2 = Y_2 = \{F_1, \dots, F_n\}$ . Man definiert sich nun die Menge  $M_1 := \{F_1\} \subset X_2 = Y_2$  und  $Z^1 := X$ . Nach Lemma 4.22 existiert nun ein  $F \in Y_2 \setminus M_1$ , sodass  $M_2 = M_1 \cup \{F\}$  Jordan-zusammenhängend in  $Y$  ist. Da  $X_2 \setminus M_1$  Jordan-zusammenhängend in  $X$  ist, existiert ein  $F$ - $F_1$ -Weg etwa  $(F, F'_1, \dots, F'_n, F_1)$  ohne Flächenwiederholung in  $X$  und wegen Lemma 4.24 auch eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma_2$  so, dass  $F$  und  $F_1$  benachbarte Flächen in  $X_{\Sigma_2}^H$  sind. Setze also  $Z^2 = X_{\Sigma_2}^H$ . Seien nun für  $1 < i < n$  die Menge  $M_i$  und die simpliziale Fläche  $Z^i$  schon konstruiert. Nach Lemma 4.22 existiert eine Fläche  $F \in Y_2 \setminus M_i$  so, dass  $M_{i+1} = M_i \cup \{F\}$  Jordan-zusammenhängend in  $Y$  ist.

Da  $M_i$  Jordan-zusammenhängend in  $W = Z^i$  ist, existiert eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma'$ , sodass  $M_{i+1}$  Jordan-zusammenhängend in  $W_{\Sigma'}^H$  ist und es nach obiger Vorüberlegung für Knoten  $V \in Y_0$  mit zugehörigem Schirm

$(F_1, \dots, F_j, F, F_{j+1}, \dots, F_{n_1})$  einen Knoten  $V' \in W_0$  mit dem zugehörigem Schirm  $(F_1, \dots, F_j, F, F'_{j+1}, \dots, F'_{n_2})$  gibt, wobei  $F_k \in M_i$  für  $1 \leq k \leq j$ ,  $F_{l_1} \in W_2$  für  $k < l_1 \leq n_1$ ,  $F'_{l_2} \in Y_2 =$  und  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  gilt. Wegen der Vorüberlegung 4.28 findet man gegebenenfalls eine Lochwanderungssequenz  $\tilde{\Sigma}$ , sodass  $N_{M_{i+1}}^{\tilde{W}}(F) = N_{M_{i+1}}^Y(F)$  für alle  $F \in M_{i+1}$  gilt, wobei  $\tilde{W} = (W_{\Sigma'}^H)_{\tilde{\Sigma}}^H$  ist und setzt nun  $Z^{i+1} = \tilde{W}$ .

Somit erhalten wir dann schließlich  $M_n = X_2$  und eine simpliziale Fläche  $X_{\Sigma^*}^H$ .

Es bleibt nun zu zeigen, dass  $Z = X_{\Sigma^*}^H$  und  $Y$  isomorph sind. Nach Konstruk-

tion gilt  $N_Z(F) = N_Y(F)$  für alle  $F \in Z_2 = Y_2$ . Damit konstruiert man sich nun folgende Inzidenzgraphen: Zu  $S \in \{Z, Y\}$  definiert man sich den Graphen  $G^S = (V^S, E^S)$ , welcher gegeben ist durch die Knoten  $V^S = S_2$  und die Kanten  $E^S = \{\{F, F'\} \mid \exists e \in S_1 : e < F, F'\}$ . Dann gilt  $G^Y = G^Z$  und da  $|N_S(F)| = 3$  für alle  $F \in S_2$  gilt, ist  $G^Y = G^Z$  3-zusammenhängend. Außerdem ist  $G^Y = G^Z$  ein planarer Graph. Die Behauptung folgt nun mit dem folgendem Satz aus der Graphentheorie.  $\square$

**Satz 4.30** (Satz von Whitney). *Sei  $G = (V, E)$  ein 3-fach zusammenhängender planarer Graph. Dann lässt sich  $G$  eindeutig in die Sphäre einbetten. [2]*

**Folgerung 4.31.** *Seien  $(X, <)$  und  $(Y, <)$  simpliziale Flächen und  $Z$  eine weitere simpliziale Fläche, die keine Knoten vom Grad 2 enthält. Es gilt weiterhin  $\chi(X) = \chi(Y) = \chi(Z) = 2$  und  $|X| = |Y| = |Z|$ . Dann existiert eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$ , sodass  $X_{\Sigma}^H \cong Y$  ist.*

*Beweis.*  $X$  und  $Z$  erfüllen alle Voraussetzungen für den Satz 4.29. Deshalb existiert eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma_1$ , sodass  $X_{\Sigma_1}^H \cong Z$  ist. Analog findet man ebenfalls eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma_2$ , sodass  $Y_{\Sigma_2}^H \cong Z$  ist. Mit Bemerkung 4.8 ist leicht einzusehen, dass es eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma_2^{-1}$  gibt, sodass  $(Y_{\Sigma_2}^H)_{\Sigma_2^{-1}}^H \cong Y$  ist. Damit ist  $(X_{\Sigma_1}^H)_{\Sigma_2^*}^H \cong Y$ , wobei hier  $\Sigma_2^*$  die Lochwanderungssequenz, die aus  $X_{\Sigma_1}^H$  eine zu  $Y$  isomorphe simpliziale Fläche konstruiert. Für einen Isomorphismus  $\alpha : Y_{\Sigma_2}^H \rightarrow X_{\Sigma_1}^H$  besteht  $\Sigma_2^*$  aus den Bildern der Flächen und Kanten der Lochwanderungssequenz  $\Sigma_2^{-1}$ .  $\square$

Nun wird die sogenannte Euler-Charakteristik einer simplizialen Fläche genauer betrachtet. Mit den Bezeichnungen wie in der Beschreibung der obigen drei Prozeduren ist  $P_F^1(X) = S_{\{e_3^1, e_3^2\}}^c(R_{\{e_2^1, e_2^2\}}^c(C_{\{e_1^1, e_1^2\}}^c(X)))$  und somit gilt für die Euler-Charakteristik der simplizialen Fläche  $P_F^1(X)$

$$\begin{aligned} \chi(P_F^1(X)) &= \chi(S_{\{e_3^1, e_3^2\}}^c(R_{\{e_2^1, e_2^2\}}^c(C_{\{e_1^1, e_1^2\}}^c(X)))) \\ \chi(R_{\{e_2^1, e_2^2\}}^c(C_{\{e_1^1, e_1^2\}}^c(X))) + 1 &= \chi(C_{\{e_1^1, e_1^2\}}^c(X)) + 1 \\ &= \chi(X) - 1 + 1 = \chi(X). \end{aligned}$$

Und durch eine analoge Vorgehensweise bei den Prozeduren  $P^2$  und  $P^3$  erhält man  $\chi(P_f^2(P_F^1(X))) = \chi(X)$  und dann schließlich

$$\chi(X_{(F,f)}^H) = \chi(P_F^3(P_f^2(P_F^1(X)))) = \chi(X).$$

Also verändert sich bei der Manipulation der simplizialen Flächen durch die drei Prozeduren die Euler-Charakteristik nicht. Wegen  $\chi(P_f^2(Y)) = \chi(Y)$  für eine simpliziale Fläche  $Y$ , auf die man die Prozedur  $P^2$  anwenden kann, und  $f \in \mathcal{W}_f(Y)$  für

ein  $F \in Y_2$ , kann man, für die durch eine Lochwanderung  $\sigma$  entstandene simpliziale Fläche  $X_\sigma^H$

$$\chi(X_\sigma^H) = \chi(X)$$

und dann schließlich

$$\chi(X_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}^H) = \chi(X)$$

für eine beliebige Lochwanderungssequenz  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  und  $n \in \mathbb{N}$  schließen.

## 4.6 Knotengrade

Man interessiert sich ebenfalls dafür, wie sich die Grade der Knoten der simplizialen Fläche  $X_{(F,f)}^H$  aus den Graden der Knoten in  $X$  zusammensetzen. Hierzu betrachtet man die unten angeführten Tabellen, die die Grade der Knoten in den einzelnen Schritten der drei Prozeduren darstellen. Es werden jedoch nur die Knoten angeführt, deren Kanten durch die Operatoren verändert werden, denn für alle anderen Knoten bleibt der Grad in jedem Schritt der drei Prozeduren unverändert. Hierfür verwendet man die Bezeichnungen der obigen Konstruktion und definiert den Grad der zu betrachteten Knoten wie folgt:

$V$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}$	$\{V_3^1, V_3^2\}$	$\{V_4\}$
$\deg(V)$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$

Hier gilt  $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ .

### Prozedur $P^1$

- Nach Anwendung des Cratercutters erhält man folgende Knotengrade.

$V$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}$	$\{V_3^1, V_3^2\}$	$\{V_4\}$
$\deg(V)$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$

- Durch Anwendung des Ripcutters ergibt sich:

$V$	$\{V_1^1, V_1^2, V_1^3\}$	$\{V_2^1, V_2^2\}$	$\{V_3^1\}$	$\{V_3^2\}$	$\{V_4\}$
$\deg(V)$	$n_1$	$n_2$	1	$n_3 - 1$	$n_4$

- Nach dem Splitcut ergeben sich folgende Grade.

$V$	$\{V_1^1\}$	$\{V_1^2, V_1^3\}$	$\{V_2^1\}$	$\{V_2^2\}$	$\{V_3^1\}$	$\{V_3^2\}$	$\{V_4\}$
$\deg(V)$	1	$n_1 - 1$	1	$n_2 - 1$	1	$n_3 - 1$	$n_4$

### Prozedur $P^2$

- Als Ergebnis des Ripcutters erhält man

$V$	$\{V_1^1\}$	$\{V_1^2\}$	$\{V_1^3\}$	$\{V_2^1\}$	$\{V_2^2\}$	$\{V_3^1\}$	$\{V_3^2\}$	$\{V_4\}$
$\deg(V)$	1	1	$n_1 - 2$	1	$n_2 - 1$	1	$n_3 - 1$	$n_4$

- Zusammensetzen der Kanten durch den Ripmender erbringt

$V$	$\{V_1^1\}$	$\{V_1^2, V_3^2\}$	$\{V_1^3\}$	$\{V_2^1\}$	$\{V_2^2\}$	$\{V_3^1\}$	$\{V_4\}$
$\deg(V)$	1	$n_3$	$n_1 - 2$	1	$n_2 - 1$	1	$n_4$

### Prozedur $P^3$

- Der Splitmender im ersten Schritt der Prozedur  $P^3$  führt zu

$V$	$\{V_1^1, V_4\}$	$\{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	$\{V_1^3\}$	$\{V_2^2\}$	$\{V_3^1\}$
$\deg(V)$	$n_4 + 1$	$n_3 + 1$	$n_1 - 2$	$n_2 - 1$	1

- Nach Anwendung der Ripmenders erhält man

$V$	$\{V_1^1, V_4\}$	$\{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	$\{V_1^3, V_3^1\}$	$\{V_2^2\}$
$\deg(V)$	$n_4 + 1$	$n_3 + 1$	$n_1 - 1$	$n_2 - 1$

- Die Anwendung des Cratermenders liefert folgende Knotengrade.

$V$	$\{V_1^1, V_4\}$	$\{V_2^1, \{V_1^2, V_3^2\}\}$	$\{V_1^3, V_3^1\}$	$\{V_2^2\}$
$\deg(V)$	$n_4 + 1$	$n_3 + 1$	$n_1 - 1$	$n_2 - 1$

Für durch Lochwanderungen und Lochwanderungssequenzen entstandene simpliziale Flächen betrachtet man die nach der ersten Prozedur veränderten Grade der Knoten und verändert diese, für jede weitere Kante mit welcher die Prozedur  $P^2$  durchgeführt wird, wie oben vorgeschrieben.

Hier sei angemerkt, dass alle Knotengrade mindestens zwei sind, da die durch die drei Prozeduren entstandene simpliziale Fläche wieder geschlossen ist. Das heißt, es gilt  $n_1, n_2 \geq 3$  und  $n_3, n_4 \geq 2$ .

## 5 Simpliciale Flächen mit 2- und 3-Waists

### 5.1 2-Waists und 3-Waists

**Definition 5.1.** Sei  $(X, <)$  eine geschlossene simpliciale Fläche und  $e_1, \dots, e_n \in X_1$  mit  $e_i \neq e_j$  für  $i \neq j$  und  $n \geq 2$ .

1. Man nennt  $(e_1, \dots, e_n)$  einen Pfad von Kante  $e_1$  zur Kante  $e_n$  in  $X$ , falls es Knoten  $V_1, \dots, V_{n-1} \in X_0$  mit

$$V_i < e_i \text{ und } V_i < e_{i+1}$$

gibt. Hierbei ist  $n$  die Länge des Pfades.

2. Falls es in der obigen Definition einen Knoten  $V_n \in X_0$  mit  $V_n < e_n$  und  $V_n < e_1$  gibt, so nennt man den Pfad  $(e_1, \dots, e_n)$  geschlossen.

3. Einen geschlossenen Pfad der Länge 2 nennt man 2-Waist und einen geschlossenen Pfad der Länge 3 nennt man 3-Waist, falls

$$|\{e_1, e_2, e_3\} \cap X_1(F)| < 3 \text{ für alle } F \in X_2 \text{ gilt,}$$

wobei  $(e_1, e_2, e_3)$  ein geschlossener Pfad ist.[1]

**Bemerkung 5.2.** Sei  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche mit  $|X_2| > 2$  und  $V \in X_0$  ein Knoten in  $X$  mit  $\deg(V) = 2$ . Dann definiert der Knoten  $V$  einen 2-Waist. Sei dazu  $X_2(V) = \{F_1, F_2\}$  für  $F_1, F_2 \in X_2$ . Damit haben  $F_1$  und  $F_2$  wegen Lemma 4.13 genau zwei gemeinsame Kanten und jeweils eine Kante, die nicht zu der anderen Fläche adjazent ist, da  $|X_2| > 2$  gilt. Das heißt, es existieren  $e_1, e_2 \in X_1$ , für welche  $e_1 < F_1, e_1 \not< F_2, e_2 \not< F_1$  und  $e_2 < F_2$  gilt. Somit ist durch  $(e_1, e_2)$  ein 2-Waist gegeben.

Falls  $\deg(V) = 3$  und  $|X_2| > 3$  ist, so definiert  $V$  einen 3-Waist. Dies kann man mit analoger Argumentation zeigen.[2]

Die Umkehrung der obigen Bemerkung gilt jedoch nicht, was durch folgende Konstruktion erläutert wird.

Seien  $(T^1, <_1)$  und  $(T^2, <_2)$  Tetraeder, wie zuvor definiert, wobei die Knoten bzw. Kanten bzw. Flächen von  $T^i$  für  $i \in \{1, 2\}$  mit  $V_1^i, V_2^i, V_3^i, V_4^i$ , bzw.  $e_1^i, e_2^i, e_3^i, e_4^i, e_5^i, e_6^i$  bzw.  $F_1^i, F_2^i, F_3^i, F_4^i$  bezeichnet werden. Man nutzt wieder die Bemerkung 4.1 und verwendet die Isomorphie von  $T^1$  zu einer simplizialen Fläche  $Y^1 \in \mathcal{M}(4\Delta)$ , die durch  $e_3^1 = \{e_3^1, e_3^2\}$  und die Isomorphie von  $T^2$  zu einer simplizialen Fläche  $Y^2 \in \mathcal{M}(n\Delta)$  mit  $e_3^2 = \{e_3^{1'}, e_3^{2'}\}$  festgesetzt werden, wobei  $V_1^1, V_2^1 \in T_0^1$  die zugehörigen Knoten in  $T^1$  und  $V_1^2, V_2^2 \in T_0^2$  die zugehörigen Knoten in  $T^2$  sind. Mithilfe dieser beiden Mendings konstruiert man sich die simpliziale Fläche  $(X, <)$  mit den Knoten  $X_0 = T_0^1 \cup T_0^2$ , Kanten  $X_1 = T_1^1 \cup T_1^2$ , Flächen  $X_2 = T_2^1 \cup T_2^2$  und  $x < y$  in  $X$  genau dann, wenn  $x <_1 y$  in  $T^1$  oder  $x <_2 y$  in  $T^2$  ist. Dann führt man folgende Operationen auf  $X$  aus:

1. Wende den Cratercut  $C_{\{e_3^1, e_3^2\}}^c$  an, um die Kanten  $\{e_3^1\}, \{e_3^2\}$  zu erhalten.
2. Wende den Cratercut  $C_{\{e_3^{1'}, e_3^{2'}\}}^c$  an, um die Kanten  $\{e_3^{1'}\}, \{e_3^{2'}\}$  zu erhalten.
3. Wende den Splitmender  $S_{(\{V_1^1, \{e_3^1\}\}, \{V_1^2, \{e_3^{1'}\}\})}^m$  an, um die Kanten  $\{e_3^1\}$  und  $\{e_3^{1'}\}$  zu der Kante  $\{e_1^1, e_3^{1'}\}$  zusammenzuführen und um die Knoten  $\{V_1^1, V_1^2\}$  und  $\{V_2^1, V_2^2\}$  zu erhalten.
4. Wende nun den Cratermender  $C_{\{e_3^2, \{e_3^{2'}\}}^m}$  an, um die Kante  $\{e_3^2, e_3^{2'}\}$  zu erhalten.

Die durch die Mender- und Cutteroperationen entstandene simpliziale Fläche  $Z$  ist geschlossen, Jordan-zusammenhängend und es gilt

$$\{\deg(V) \mid V \in Z_0\} = \{3, 6\}.$$

Damit enthält  $Z$  keinen Knoten vom Grad 2, jedoch bildet  $(\{e_3^1, e_3^{1'}\}, \{e_3^2, e_3^{2'}\})$  einen 2-Waist in  $Z$ . Auf ähnliche Art und Weise kann man zeigen, dass eine simpliziale Fläche einen 3-Waist enthalten kann, ohne einen Knoten vom Grad 3 zu haben.

## 5.2 Prozedur $W^2$

Im Folgendem will man aus einer simplizialen Fläche, die keinen 2-Waist enthält, eine simpliziale mit zwei zusätzlichen Flächen und einem 2-Waist konstruieren. Hierfür macht man Gebrauch von dem zu Beginn definierten Open-Bag.

**Bemerkung 5.3.** *Zur Erinnerung sei hier angemerkt, dass der Open-Bag  $(B, <_B)$  durch das ordinale Symbol*

$$\omega((B, <_B)) = (3, 4, 2; (\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}), (\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}))$$

*definiert ist.*

Seien  $(B, <_B)$  der Open-Bag und  $(X, <)$  eine geschlossene simpliziale Fläche. Dann definiert man zunächst eine simpliziale Fläche  $Z$  durch die Knoten  $Z_0 = X_0 \cup B_0$ , die Kanten  $Z_1 = X_1 \cup B_1$  und die Flächen  $Z_2 = X_2 \cup B_2$ . Außerdem gilt  $x <_Z y$  in  $Z$  genau dann, wenn  $x < y$  in  $X$  oder  $x <_B y$  in  $B$  gilt.

Für eine Kante  $f \in X_1 \subseteq Z_1$  und Knoten  $V, V' \in X_0 \subseteq Z_0$  mit  $X_0(f) = \{V, V'\}$  identifiziert man  $Z$  mit einem Mending, welches durch  $f = \{f_1, f_2\}$  festgesetzt wird.

Nun führt man folgende Operationen auf  $Z$  durch:

- Man führt den Cratercut  $C_{\{f_1, f_2\}}^c$  durch, um die Kanten  $\{f_1\}$  und  $\{f_2\}$  erhalten.
- Man wendet den Splitmender  $S_{(V, f_1), (V_1, e_2)}^m$  an, um die Kanten  $\{f_1\}$  und  $\{e_2\}$  zusammenzuführen und um somit die Knoten  $\{V, V_1\}$  und  $\{V', V_2\}$  zu erhalten.
- Man wendet den Cratermender  $C_{\{e_4, \{f_2\}}^m$  an, um die Kante  $\{e_4, f_2\}$  zu erschaffen.

Dadurch erhält man eine geschlossene simpliziale Fläche, in welcher man den 2-Waist  $(\{e_2, f_1\}, \{e_4, f_2\})$  vorfinden kann. Man bezeichnet diese simpliziale Fläche mit  $W_f^2(X)$ , falls durch die obige Prozedur ein 2-Waist an der Stelle  $f$  konstruiert wurde.

Nun stellt sich die Frage, ob es möglich ist, durch Anwendung einer Lochwanderungssequenz auf  $W_f^2(X)$  eine simpliziale Fläche zu konstruieren, die keinen 2-Waist mehr enthält. Mithilfe der nachgewiesenen Transitivität der Operation Wanderinghole können schon erste Beobachtungen gemacht werden.

**Folgerung 5.4.** Seien  $(X, <)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche,  $f \in X_1$  eine Kante in  $X$  und  $Y = W_f^2(X)$ . Seien außerdem  $(Z, <_Z)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche, die keinen Knoten vom Grad zwei enthält,  $|Y_2| = |Z_2|$  und  $\chi(Y) = \chi(Z) = 2$ . Dann existiert eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  so, dass  $Y_\Sigma^H \cong Z$  ist.

### 5.3 Prozedur $W^3$

Nun soll aus einer simplizialen Fläche eine weitere simpliziale Fläche konstruiert werden, die zwei zusätzliche Flächen enthält und dazu noch einen 3-Waist besitzt. Hierfür verwendet man die folgende simpliziale Fläche.

**Definition 5.5.** Man definiert die simpliziale Fläche Hut  $(H, <_H)$  durch die Knoten  $H_0 = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ , die Kanten  $H_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  und die Flächen  $H_2 = \{F_1, F_2, F_3\}$ . Die Inzidenz  $<$  erhält man durch das ordinale Symbol

$$\omega((H, <_H)) = (4, 6, 3; \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \\ \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 5, 6\}).$$

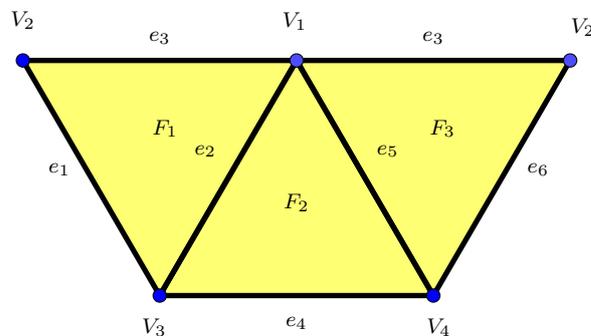


Abbildung 41: Hut

Für eine geschlossene simpliziale Fläche  $(X, <)$  und  $F \in X_2$  konstruiert man zunächst die simpliziale Fläche  $(Y, <_Y)$ , die gegeben ist durch  $Y_2 = X_2 \setminus \{F\}$ ,  $Y_1 = X_1$  und  $Y_0 = X_0$ . Es gilt  $x <_Y y$  in  $Y$  genau dann, wenn  $y \neq F$  ist und  $x < y$  in  $X$  gilt. Dadurch entstehen die Randkanten  $r_1, r_2, r_3 \in Y_1$  mit zugehörigen Knoten  $W_1, W_2, W_3 \in Y_0$  so, dass

$$W_i < r_j \text{ für } j \in \{1, 2, 3\}, i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$$

gilt.

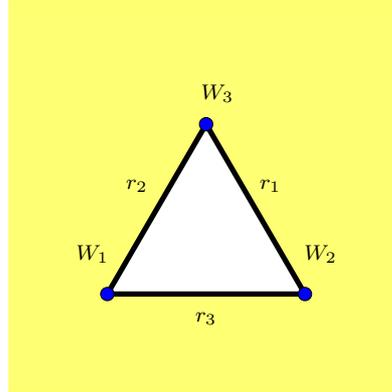


Abbildung 42: Simpliziale Fläche mit fehlender Fläche

Diese Fläche nutzt man, um die simpliziale Fläche  $Z$  zu erhalten, welche durch die Knoten  $Z_0 = Y_0 \cup H_0$ , die Kanten  $Z_1 = Y_1 \cup H_1$  und die Flächen  $Z_2 = Y_2 \cup H_2$  definiert ist. Es gilt  $x <_Z y$  in  $Z$  genau dann, wenn  $x \prec y$  in  $Y$  oder  $x <_H y$  in  $H$  gilt. Nun führt man folgende Operationen auf  $Z$  aus:

1. Führe den Splitmender  $S_{(\{W_2\}, \{r_1\}), (\{V_4, e_1\})}^m$  durch, um die Kante  $\{e_1, r_1\}$  und Knoten  $\{V_4, W_2\}$  und  $\{V_1, W_3\}$  zu erhalten.
2. Wende den Ripmender  $R_{\{e_4\}, \{r_3\}}^m$  an, um die Kante  $\{e_4, r_3\}$  und den Knoten  $\{V_3, W_1\}$  zu erhalten.
3. Wende schließlich den Cratermender  $C_{\{e_6\}, \{r_2\}}^m$  an, um die Kante  $\{e_6, r_2\}$

Dadurch erhält man eine simpliziale Fläche mit  $|X_2| + 2$  Flächen, in welcher man den 3-Waist  $(\{e_1, r_1\}, \{e_4, r_3\}, \{e_6, r_2\})$  vorfindet. Diese bezeichnet man mit  $W_F^3(X)$ , falls durch die Anwendung der obigen Prozedur die Fläche  $F$  entfernt und an dieser Stelle der Hut angesetzt wurde, um den 3-Waist zu kontrahieren.

Hier stellt sich wiederum die Frage, ob es eine Lochwanderungssequenz gibt, sodass man aus  $W_F^3(X)$  durch Anwenden dieser eine simpliziale Fläche kreiert, die keinen 2-Waist enthält. Diese Fragestellung wird in der nächsten Folgerung thematisiert.

**Folgerung 5.6.** *Seien  $(X, <)$  eine geschlossene joran-zusammenhängende simpliziale Fläche,  $F \in X_2$  eine Fläche in  $X$  und  $Y = W_F^3(X)$ . Seien außerdem  $(Z, <_Z)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche, die keinen Knoten vom Grad zwei enthält,  $|Y_2| = |Z_2|$  und  $\chi(Y) = \chi(Z) = 2$ . Dann existiert eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  so, dass  $Y_\Sigma^H \cong Z$  ist.*

Man betrachtet nun die Euler-Charakteristik der oben konstruierten simplizialen Flächen. Seien dazu wieder  $(X, <)$  eine geschlossene simpliziale Fläche,  $f \in X_1$  eine Kante und  $F \in X_2$  eine Fläche.

- Durch die Prozedur  $W^2$  erhält man zunächst die simpliziale Fläche  $Z$ , welche die disjunkte Vereinigung von  $X$  und dem Open-Bag  $B$  darstellt. Deshalb ist  $|Z_i| = |X_i| + |B_i|$  für  $i = 0, 1, 2$  und damit auch  $\chi(Z) = \chi(X) + \chi(B) = \chi(X) + 1$ . Daraufhin geht  $W_f^2(X)$  durch Anwendung eines Cratercutter, eines Splitmender und eines Cratermender aus  $Z$  hervor. Damit gilt mit den obigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \chi(W_f^2(X)) &= \chi(C_{\{e_4\}, \{f_2\}}^m(S_{(W_2, r_1), (V_4, e_1)}^m(C_{\{f_1, f_2\}}^c(Z)))) \\ &= \chi(S_{(W_2, r_1), (V_4, e_1)}^m(C_{\{f_1, f_2\}}^c(Z))) + 1 \\ &= \chi(C_{\{f_1, f_2\}}^c(Z)) \\ &= \chi(Z) - 1 \\ &= \chi(X). \end{aligned}$$

- Bei der Anwendung der Prozedur  $W^3$  erhält man auch zunächst eine simpliziale Fläche  $Z$  als disjunkte Vereinigung der geschlossenen simplizialen Fläche  $X$  und dem oben definierten Hut  $H$ . Das heißt, es gilt  $|Z_i| = |X_i| + |H_i|$  für  $i = 0, 1, 2$  und damit auch  $\chi(Z) = \chi(X) + \chi(H) = \chi(X) + 1$ . Durch Entfernen der Fläche  $F$  von  $Z$  erhält man die simpliziale Fläche  $Y$  mit  $|Y_0| = |Z_0| - 3$ ,  $|Y_1| = |Z_1| - 3$  und  $|Y_2| = |Z_2| - 1$ . Dadurch kann man

$$\begin{aligned} \chi(Y) &= |Y_0| - |Y_1| + |Y_2| \\ &= |Z_0| - 3 - (|Z_1| - 3) + |Z_2| - 1 \\ &= \chi(Z) - 1 \\ &= \chi(X). \end{aligned}$$

schließen. Schließlich erhält man  $W_F^3(X)$  durch Anwendung der Operatoren Splitmender, Ripmender und Cratermender auf  $Y$ . Mit den obigen Bezeichnungen ist dann

$$\begin{aligned} \chi(W_F^3) &= \chi(C_{\{e_6\}, \{r_2\}}^m(R_{\{e_4\}, \{r_3\}}^m(S_{(\{W_2\}, \{r_1\}), (\{V_4\}, \{e_1\})}^m(Y)))) \\ &= \chi(R_{\{e_4\}, \{r_3\}}^m(S_{(\{W_2\}, \{r_1\}), (\{V_4\}, \{e_1\})}^m(Y))) + 1 \\ &= \chi(S_{(\{W_2\}, \{r_1\}), (\{V_4\}, \{e_1\})}^m(Y)) + 1 \\ &= \chi(Y) \\ &= \chi(X). \end{aligned}$$

Das heißt die Euler-Charakteristik einer simplizialen Fläche wird durch die Anwendung der Prozeduren  $W^2$  und  $W^3$  auf diese nicht verändert.

## 6 Verallgemeinerte Konstruktionen

### 6.1 Vereinigung Simplicialer Flächen

Bisher wurde die Erweiterung einer simplicialen Fläche um den Open-Bag bzw. Tetraeder mit einer fehlenden Fläche skizziert. Dies will man nun verallgemeinern und führt zu diesem Zweck die Vereinigung von simplicialen Flächen ein, die von der Vereinigung simplicialer Flächen aus dem Skript *Combinatorial Simplicial Surfaces* inspiriert wurde.

**Definition 6.1.** Seien  $(X^1, <_1), \dots, (X^n, <_n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  simpliciale Flächen. Zur Vereinfachung sei hier  $X^i \cap X^j \neq \emptyset$  für  $i \neq j$  angenommen. Dann definiert man die simpliciale Fläche  $Z = \biguplus_{i=1}^n X^i$  durch die Knoten

$$Z_0 = Z = \bigcup_{i=1}^n (X^i)_0,$$

die Kanten

$$Z_1 = \bigcup_{i=1}^n (X^i)_1$$

und die Flächen

$$Z_2 = \bigcup_{i=1}^n (X^i)_2.$$

Weiterhin sei  $<_Z$  die Inzidenz der simplicialen Fläche  $Z$ . Dann gilt  $x <_Z y$  für  $x, y \in Z$  genau dann, wenn  $x < y$  in  $X^i$  gilt, wobei  $i \in \{1, \dots, n\}$  ist. Man nennt diese simpliciale Fläche  $Z$  die aus  $X^1, \dots, X^n$  zusammengesetzte simpliciale Fläche.

**Bemerkung 6.2.** Seien  $(X^1, <_1), \dots, (X^n, <_n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  simpliciale Flächen. Für eine wie in obiger Definition aus  $X^1, \dots, X_n$  zusammengesetzte simpliciale Fläche  $Z$  gelten folgende Aussagen

- Für  $i = 0, 1, 2$  ist  $|Z_i| = \sum_{j=1}^n |(X^j)_i|$ .
- Es gilt die Gleichheit  $\chi(Z) = \sum_{j=1}^n \chi(X^j)$ , denn

$$\begin{aligned} & \chi(Z) \\ &= |Z_0| - |Z_1| + |Z_2| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n (X^i)_0 \right| - \left| \bigcup_{i=1}^n (X^i)_1 \right| + \left| \bigcup_{i=1}^n (X^i)_2 \right| \\ &= \sum_{j=1}^n |(X^j)_0| - \sum_{j=1}^n |(X^j)_1| + \sum_{j=1}^n |(X^j)_2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n |(X^j)_0| - |(X^j)_1| + |(X^j)_2| \\
&= \sum_{j=1}^n \chi(X^j).
\end{aligned}$$

- Falls  $X^1, \dots, X^n$  geschlossene simpliziale Flächen sind, so ist auch  $Z$  geschlossen.
- $Z$  ist nicht zusammenhängend, denn es gilt

$$\begin{aligned}
&|\{U \mid U \text{ ist Zusammenhangskomponente von } Z\}| \\
&= \sum_{i=1}^n |\{U' \mid U' \text{ ist Zusammenhangskomponente von } X^i\}| \geq n
\end{aligned}$$

- Falls  $X^1 = \dots = X^n$  gilt, so schreibt man auch  $nX^1 := \bigsqcup_{i=1}^n X^i$ .

Nun sollen die Konstruktionen, die in den Prozeduren  $W^2$  und  $W^3$  beschrieben wurden, verallgemeinert werden. Hierbei beschränkt man sich aber zunächst auf den Fall, dass man zwei geschlossene simpliziale Flächen mit Euler-Charakteristik 2 durch einen 2-Waist bzw. 3-Waist zu einer geschlossenen simplizialen Fläche verbinden will. Denn der allgemeinere Fall folgt dann induktiv.

## 6.2 Verallgemeinerung der Prozedur $W^3$

Seien deshalb  $(X, <_X)$  und  $(Y, <_Y)$  geschlossene simpliziale Flächen,  $F_X \in X_2$  eine Fläche in  $X$  und  $F_Y \in Y_2$  eine Fläche in  $Y$ . Dann bildet man zunächst die simpliziale Fläche  $(X', <_{X'})$ , die gegeben ist durch  $X'_0 = X_0$ ,  $X'_1 = X_1$ ,  $X'_2 = X_2 \setminus \{F_X\}$ , wobei  $x < y$  in  $X'$  genau dann gilt, wenn  $y \neq F_X$  ist und  $x < y$  in  $X$  gilt. Analog konstruiert man die simpliziale Fläche  $(Y', <_{Y'})$ , die definiert ist durch  $Y'_0 = Y_0$ ,  $Y'_1 = Y_1$ ,  $Y'_2 = Y_2 \setminus \{F_Y\}$ , wobei  $x < y$  in  $Y'$  genau dann gilt, wenn  $y \neq F_Y$  und  $x < y$  in  $Y$  ist. Dadurch erhält man die aus  $X'$  und  $Y'$  zusammengesetzte simpliziale Fläche  $Z = X' \cup Y'$  mit den Eckknoten  $V_i^X, V_i^Y$  und den Randkanten  $f_i^X, f_i^Y$  mit den zugehörigen Inzidenzen

$$V_i^S < f_j^S \quad j \in \{1, 2, 3\}, i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}, S \in \{X, Y\}.$$

Nun führt man folgende Operationen auf  $Z$  aus:

1. Führe den Splitmender  $S_{(V_1^X, f_3^X), (V_1^Y, f_3^Y)}^m$  durch, um die Kante  $\{f_3^X, f_3^Y\}$  und Knoten  $\{V_1^X, V_1^Y\}$  und  $\{V_2^X, V_2^Y\}$  zu erhalten.
2. Wende den Ripmender  $R_{f_2^X, f_2^Y}^m$  an, um die Kante  $\{f_2^X, f_2^Y\}$  und den Knoten  $\{V_3^X, V_3^Y\}$  zu erhalten.

3. Wende schließlich den Cratermender  $C_{f_1^X, f_1^Y}^m$ , um die Kante  $\{f_1^X, f_1^Y\}$  zu erhalten.

Hierdurch entsteht eine geschlossene simpliziale Fläche, in welcher man den 3-Waist  $(\{f_1^X, f_1^Y\}, \{f_2^X, f_2^Y\}, \{f_3^X, f_3^Y\})$  vorfindet. Man bezeichnet die entstandene simpliziale Fläche mit  $W_{F_X, F_Y}^3(X, Y)$ . Falls  $Y = H$  ist, wobei  $H$  den oben definierten Hut beschreibt, so ist  $W_{F_X, F_Y}^3(X, Y) = W_{F_X}^3(X) = W_{F_X, F_Y}^3(Y, X)$ .

**Folgerung 6.3.** *Seien  $(X, <)$  und  $(Y, <)$  geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Flächen,  $F_X \in X_2$  eine Fläche in  $X$ ,  $F_Y \in Y_2$  eine Fläche in  $Y$  und  $W = W_{F_X, F_Y}^3(X, Y)$ . Seien zudem  $(Z, <_Z)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche, die keinen Knoten vom Grad zwei enthält,  $\chi(W) = \chi(Z) = 2$  und  $|W_2| = |Z_2|$ . Dann gibt es eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  so, dass  $W_\Sigma^H \cong Z$  ist.*

Bei Verwendung der gleichen Bezeichnungen wie in der obigen Konstruktion ergibt sich für die Euler-Charakteristik Folgendes:

$$\begin{aligned}
& \chi(C_{f_1^X, f_1^Y}^m(R_{F_2^X F_2^Y}^m(S_{(V_1^X, f_3^X), (V_1^Y, f_3^Y)}^m(Z)))) \\
&= \chi(R_{F_2^X F_2^Y}^m(S_{(V_1^X, f_3^X), (V_1^Y, f_3^Y)}^m(Z))) + 1 \\
&= \chi(S_{(V_1^X, f_3^X), (V_1^Y, f_3^Y)}^m(Z)) + 1 \\
&= \chi(Z) - 1 + 1 \\
&= \chi(X') + \chi(Y') \\
&= \chi(P_{F_X}^1) + \chi(P_{F_Y}^1) - 2 \\
&= \chi(X) + \chi(Y) - 2.
\end{aligned}$$

### 6.3 Verallgemeinerung der Prozedur $W^2$

Seien nun wieder  $(X, <)$  und  $(Y, <)$  geschlossene simpliziale Flächen,  $f_X \in X_1$  eine Kante in  $X$  mit zugehörigen Knoten  $V^X, W^X \in X_0$  und  $f_Y \in Y$  eine Kante in  $Y$  mit zugehörigen Knoten  $V^Y, W^Y \in Y_0$ . Zunächst führe man  $X$  und  $Y$  zu der simplizialen  $Z = X \uplus Y$  zusammen und nutzt an dieser Stelle wieder die Isomorphie von  $Z$  zu einer simplizialen Fläche, die das Anwenden der Mender- und Cutteroperatoren erleichtert, nämlich die Fläche festgesetzt durch  $f^X = \{f_1^X, f_2^X\}$  und  $f^Y = \{f_1^Y, f_2^Y\}$ . Nun führt man folgende Operationen auf  $Z$  aus:

1. Wende einen Cratercut  $C_{\{f_1^X, f_2^X\}}^c$  an, um die Kanten  $\{f_1^X\}, \{f_2^X\}$  zu erhalten.
2. Wende den Cratercut  $C_{\{f_1^Y, f_2^Y\}}^c$  an, um die Kanten  $\{f_1^Y\}, \{f_2^Y\}$  zu erhalten.
3. Wende den Splitmender  $S_{(\{V^X\}, \{f_1^X\}), (\{V^Y\}, \{f_1^Y\})}^m$  an, um die Kanten  $\{f_1^X\}$  und  $\{f_1^Y\}$  zu der Kante  $\{f_1^X, f_1^Y\}$  zusammenzuführen und um die Knoten  $\{V^X, V^Y\}$  und  $\{W^X, W^Y\}$  zu erhalten.

4. Wende nun den Cratermender  $C_{\{f_2^X, \{f_2^Y\}}^m$  an, um die Kante  $\{f_2^X, f_2^Y\}$  zu erhalten.

**Folgerung 6.4.** *Seien  $(X, <)$  und  $(Y, <)$  geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Flächen,  $f_X \in X_1$  eine Kante in  $X$ ,  $f_Y \in Y_1$  eine Kante in  $Y$  und  $W = W_{f_X, f_Y}^2(X, Y)$ . Seien zudem  $(Z, <_Z)$  eine geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Fläche, die keinen Knoten vom Grad zwei enthält,  $\chi(W) = \chi(Z) = 2$  und  $|W_2| = |Z_2|$ . Dann gibt es eine Lochwanderungssequenz  $\Sigma$  so, dass  $W_H^\Sigma \cong Z$  ist.*

Beim Betrachten der Euler-Charakteristik der simplizialen Fläche  $W_2(X, Y)$ , wobei hier die Bezeichnungen wie in der obigen Konstruktion übernommen werden, erkennt man

$$\begin{aligned}
& \chi(W_f^2(X, Y)) \\
&= \chi(C_{\{f_2^X, \{f_2^Y\}}^m (S_{(\{V^X, \{f_1^X\}), (\{V^Y, \{f_1^Y\})}^m (C_{\{f_1^Y, f_2^Y\}}^c (C_{\{f_1^X, f_2^X\}}^c (Z)))))) \\
&= \chi(S_{(\{V^X, \{f_1^X\}), (\{V^Y, \{f_1^Y\})}^m (C_{\{f_1^Y, f_2^Y\}}^c (C_{\{f_1^X, f_2^X\}}^c (Z)))) + 1 \\
&= \chi(C_{\{f_1^Y, f_2^Y\}}^c (C_{\{f_1^X, f_2^X\}}^c (Z))) + 1 - 1 \\
&= \chi(C_{\{f_1^X, f_2^X\}}^c (Z)) - 1 \\
&= \chi(Z) - 2 = \chi(X) + \chi(Y) - 2.
\end{aligned}$$

**Bemerkung 6.5.** *An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Operation Wandering-hole und die verallgemeinerten Prozeduren  $W^2$  und  $W^3$  für geschlossene simpliziale Flächen wohldefiniert sind. Da aber durch deren einfache Anwendung nur eine Zusammenhangskomponente der simplizialen Fläche verändert wird, reicht es geschlossene Jordan-zusammenhängende simpliziale Flächen unter der Anwendung der Operation und den Prozeduren zu betrachten, denn der allgemeinere Fall ist dann nur eine einfache Folgerung.*

## 7 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, die Manipulation von simplizialen Flächen durch die Operation Wanderinghole zu untersuchen. Es konnte gezeigt werden, dass das Anwenden der Operation im obigen Sinne transitiv ist. Das heißt, falls  $X$  und  $Y$  simpliziale Flächen mit den oben angeführten Voraussetzungen sind, so kann man durch die Anwendung einer Lochwanderungssequenz, bis auf Isomorphie  $X$  in  $Y$  überführen. Die Eigenschaft der Transitivität zu erhalten, ist für spätere Untersuchungen und die Implementierung in *Gap* sehr hilfreich, wie man schon am Beispiel der Prozeduren  $W^2$  und  $W^3$  erkennen kann. Jedoch kann diese Eigenschaft womöglich noch verstärkt werden.

In dieser Arbeit wurde die Transitivität über einen Konstruktionsbeweis nachgewiesen. Also wurde eine Lochwanderungssequenz angegeben, mit der man  $X$  in  $Y$  überführen kann, jedoch wurde keine Aussage über die simplizialen Flächen getroffen, die durch iteratives Anwenden der Operation entstanden sind. Ein erster Ansatz zur Verstärkung der Aussage ist es, zu zeigen, dass keine dieser simplizialen Flächen, die beim Überführen von  $X$  in  $Y$  entstehen, zu einem Knoten vom Grad zwei inzident ist. Falls dies möglich ist, ist eine weitere Verbesserung der Aussage, zu zeigen, dass dieses Überführen ebenfalls möglich ist, ohne simpliziale Flächen mit 2- oder 3-Waists zu konstruieren. Dies kann man nutzen, um die Implementierung zu optimieren. Denn derzeit werden bei der Anwendung des Algorithmus zur Bestimmung der Bahn einer simplizialen Fläche unter der Operation Wanderinghole simpliziale Flächen konstruiert, die nicht von Interesse sind, nämlich jene mit 2- oder 3-Waists. Deshalb liefert der Beweis der stärkeren Aussagen eine Optimierungsmöglichkeit der Implementierung.

Falls sich die Aussagen doch nicht zeigen lassen, ist es sinnvoll sich zu überlegen, wie viele simpliziale Flächen es ohne 2- oder 3-Waists und einer vorgegebenen Flächenanzahl gibt. Denn dann ist es möglich, eine Abbruchbedingung anzugeben. Sobald alle simplizialen Flächen gefunden wurden, kann der Algorithmus angehalten werden und es ist nicht nötig abzuwarten, bis jegliche simpliziale Fläche konstruiert wurde. Die stärkeren Aussagen wurden mithilfe des *Gap*-Paketes für Flächen mit Flächenanzahl 24 verifiziert.

Es ist ebenfalls interessant zu untersuchen, ob man die Operation sinnvoll auf nicht geschlossene simpliziale Flächen definieren kann, um auf diesen Flächen die Wirkung der Operation zu untersuchen. Dabei kann man für Lochwanderungen, die nur innere Kanten verändern, die Operation Wanderinghole analog zum oben skizzierten Fall einer geschlossenen simplizialen Fläche anwenden. Problematisch sind die Flächen, die zu Randkanten inzident sind. Zur Illustration soll, das hier angeführte Bild, andeuten, wie eine solche Lochwanderung aussehen kann. An dieser Stelle verzichtet

man auf eine formale Definition dieser verallgemeinerten Operation Wanderinghole und gibt sich zunächst mit der Abbildung zufrieden.

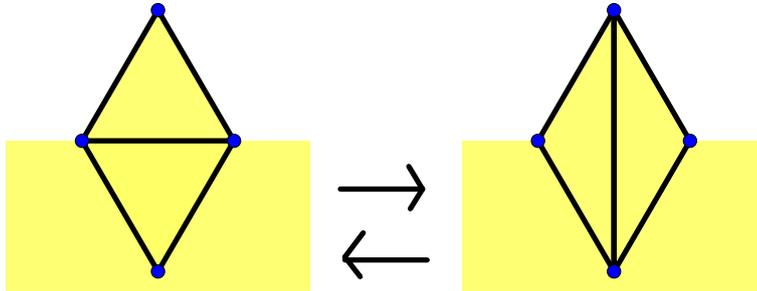


Abbildung 43: Verallgemeinerung der Operation Wanderinghole

Für diese Verallgemeinerung ist es sinnvoll, Wanderinghole nicht über den Ansatz der Manipulation der simplizialen Fläche über die Anwendung von Mender- und Cutteroperation zu wählen, sondern sich von der Implementierung in *Gap* inspirieren zu lassen und diese Operation, durch eine Manipulation des ordinalen Symbols, zu realisieren.

Abschließend kann man also sagen, dass die Transitivität der Operation Wanderinghole eine sehr nützliche Eigenschaft ist, um so neue simpliziale Flächen zu konstruieren und so die Bibliothek im *Gap*-Paket durch hinzufügen der konstruierten Flächen zu erweitern, wie man am Beispiel der Prozeduren  $W^2$  und  $W^3$  sehen kann. Diese Eigenschaft entfaltet ihre Ausdrucksstärke jedoch erst mit einem Beweis der Transitivität der Operation ohne das Erzeugen von simplizialen Flächen mit 2- und 3-Waists.

# Anhang

```
1  #!      @Description
2  #!      1.Find new simplicial surfaces by using the operation
3  #!      Wanderinghole.
4  #!      2. Creating new simplicial surfaces which two/three more
5  #!      faces by applying a 2-Waist/3-Waist to a simplicial
6  #!      surface
7
8  LoadPackage("SimplicialSurfaces");
9  #Read("wl.g");
10 Read("Classification.g");
11 Read("CanonicalRepresentativeOfPolygonalSurface.g");
12
13 #!      @Arguments: a simplicial surface, a face and a edge of the
14 #!      simplicial surface, so that the edge is adjacent to the given
15 #!      face
16 #!      @Returns a simplicial surface py performing the wanderinghole
17 Wandering:=function(S,Face,Edge)
18     local Neighbour,A,B,EdgeNA,EdgeFA,EdgeNB,EdgeFB,VertN,
19     VertF,EdgesOfF,VerticesOfE,result,VerticesOfF;
20
21     # the original vertices/edges/faces of S which have to be
22     #manipulated for the Wanderinghole
23     Neighbour:=NeighbourFaceByEdgeNC(S,Face, Edge);
24     A:=VerticesOfEdgeNC(S,Edge) [1];
25     B:=VerticesOfEdgeNC(S,Edge) [2];
26     EdgeFA:=OtherEdgeOfVertexInFaceNC(S,A,Edge,Face);
27     EdgeNA:=OtherEdgeOfVertexInFaceNC(S,A,Edge,Neighbour);
28     EdgeFB:=OtherEdgeOfVertexInFaceNC(S,B,Edge,Face);
29     EdgeNB:=OtherEdgeOfVertexInFaceNC(S,B,Edge,Neighbour);
30     VertF:=OtherVertexOfEdgeNC(S,A,EdgeFA);
31     VertN:=OtherVertexOfEdgeNC(S,A,EdgeNA);
32
33     #test, whether the operation can be performed
34     if VertF=VertN then
35         return fail;
36     fi;
37
```

```

38     #copy of the List of vertices/edges/faces of S
39     VerticesOfE:=ShallowCopy(VerticesOfEdges(S));
40     EdgesOfF:=ShallowCopy(EdgesOfFaces(S));
41     VerticesOfF:=ShallowCopy(VerticesOfFaces(S));
42
43     #change incidences to perform the Wanderinghole
44     VerticesOfE[Edge]:=Set([VertF,VertN]);
45     EdgesOfF[Face]:=Set([Edge,EdgeFA,EdgeNA]);
46     EdgesOfF[Neighbour]:=Set([Edge,EdgeFB,EdgeNB]);
47     VerticesOfF[Face]:=Set([A,VertF,VertN]);
48     VerticesOfF[Neighbour]:=Set([B,VertN,VertF]);
49
50     #create new surface
51     result:=Objectify(PolygonalComplexType,rec());
52     SetVerticesOfEdges(result,VerticesOfE);
53     SetEdgesOfFaces(result,EdgesOfF);
54     SetVerticesOfFaces(result,VerticesOfF);
55     SetVerticesAttributeOfVEFComplex(result,
56         VerticesAttributeOfVEFComplex(S));
57     SetEdges(result,Edges(S));
58     SetFaces(result,Faces(S));
59     SetIsNotEdgeRamified(result,true);
60     SetIsNotVertexRamified(result,true);
61
62     SetIsTriangular(result,true);
63     return result;
64 end;
65
66 #! @Description Performing the operation Wanderighole
67 #! iteratively on a simplicial surface To get a list of the
68 #! created simplicial surfaces
69 #! @Arguments a simplicial surface
70 #! @Returns a list of simplicial surfaces
71
72 WanderingIterativ:=function(S)
73     local SurfaceStack,edge,surf,FaceR,EdgeR,T;
74
75     #create canonical Representative
76     S:=CanonicalRepresentativeOfPolygonalSurface2(S)[1];

```

```

77
78     #creating surfacestack
79     SurfaceStack:=[S];
80
81     #Now we have to perform every possible Wanderhinghole
82     #operation
83     #on a surface. Therefore we create a stack of surfaces and
84     #for each surface in the stack wanderinghole is performed
85     #with each edge in that surface
86     for surf in SurfaceStack do
87         for edge in Edges(surf) do
88             T:=Wandering(surf,FacesOfEdge(surf,edge)
89                         [1],edge);
90             if T <> fail then
91                 T:=
92                 CanonicalRepresentativeOf
93                 PolygonalSurface2(T)[1];
94                 #test whether surface is already in
95                 #stack
96                 if not(T in SurfaceStack) then
97                     Add(SurfaceStack,T);
98                 fi;
99             fi;
100         od;
101     od;
102     return SurfaceStack;
103 end;
104
105 #!     @Description: Performing the operation Wanderinghole
106 #!     iteratively on a simplicial surface to get a list of all
107 #!     created surfaces. In this case we are only interested in
108 #!     surfaces without 2-waists and 3-waists
109 #!     @Arguments: a simplicial surface
110 #!     @Returns a list of surfaces
111 WanderingIterativWithoutWaist:=function(S)
112     local SurfaceStackW,edgeW,surfW,TW;
113
114     #creating canonical representative of surface S
115     S:=CanonicalRepresentativeOfPolygonalSurface2(S)[1];

```

```

116
117     #creating surfacestack
118     SurfaceStackW:=[S];
119
120     #Now we have to perform every possible Wanderhinghole
121     #operation on a surface. Therefore we create a stack of
122     #surfaces and for each surface in the stack wanderinghole is
123     #performed with each edge in that surface
124     for surfW in SurfaceStackW do
125         for edgeW in Edges(surfW) do
126             TW:=Wandering(surfW,FacesOfEdge(surfW,edgeW)
127                 [1],edgeW);
128
129             #test whether surface has 2-Waists or
130             #3-Waists and
131             #whether the surface created is already in
132             #surfacestack
133             if TW <> fail then
134                 if IsAnomalyFree(TW) and
135                     HasNoWaist(TW) then
136                     TW:=CanonicalRepresentativeOf
137                         PolygonalSurface2(TW)[1];
138                     if not(TW in SurfaceStackW)
139                         then
140                         Add(SurfaceStackW,TW);
141                         fi;
142                     fi;
143                 fi;
144             od;
145         od;
146     return SurfaceStackW;
147 end;
148
149 #!     @Description: checks whether a simplicial surface is in a
150 #!     given list
151 #!     @Arguments: a simplicial surface and a list of surfaces
152 #!     @Returns:true if surface is in the given list otherwise the
153 #!     function returns false
154 Found:=function(S,L)

```

```

155         if S in L then
156             return false;
157         fi;
158         return true;
159     end;
160
161     #!     @Description the function creates iteratively simplicial
162     #!     surfaces by performing the wanderinghole and checks whether
163     #!     these surfaces are in a given list
164     #!     @Arguments a simplicial surface and a list of surfaces
165     #!     @Returns a list of simplicial surfaces and if this list is
166     #!     the same as the given list, the function returns true
167     #!     otherwise the function returns false
168
169     FoundSurfaces:=function(S,Listofsurfaces)
170         local counter, ende,surface,edge,i,T,Foundsurf;
171         if Listofsurfaces=[] then
172             Listofsurfaces:=AllSimplicialSurfaces(NumberOfFaces(S),
173                 EulerCharacteristic,2);
174         fi;
175
176         #replace all simplicial surfaces in Listofsurfaces which
177         #their canonical representative
178         Listofsurfaces:=List(Listofsurfaces,surface->
179             CanonicalRepresentativeOf
180             PolygonalSurface2(surface)[1]);
181         S:=CanonicalRepresentativeOfPolygonalSurface2(S)[1];
182         Foundsurf:=[S];
183
184         #counting how many created surfaces are in Listofsurfaces
185         i:=0;
186         counter:=0;
187         ende:=Length(Listofsurfaces);
188         if S in Listofsurfaces then
189             counter:=1;
190         fi;
191         #Now we have to perform every possible Wanderinghole
192         #operation on a surface. Therefore we create a stack of
193         #surfaces and for each surface in the stack wanderinghole is

```

```

194     #performed with each edge in that surface
195     for surface in Foundsurf do
196         for edge in Edges(surface) do
197             #if all surfaces in listofsurfaces are found
198             #we can stop the function
199             if counter=ende then
200                 return [true, Foundsurf];
201             fi;
202             T:=Wandering(surface,FacesOfEdge
203                 (surface,edge)[1],edge);
204             i:=i+1;
205
206             #checking whether created surface is in the
207             #given list and if it is in the given list we
208             #have to increment the counter
209             if T <> fail and HasNoWaist(T) then ##
210                 T:=CanonicalRepresentativeOf
211                     PolygonalSurface2(T)[1];
212                 #Print(Found(T,Listofsurfaces));
213                 if Found(T,Foundsurf) then
214                     Add(Foundsurf,T);
215                     counter:=counter+1;
216                 fi;
217             fi;
218         od;
219     od;
220     return [false,Foundsurf];
221
222 end;
223
224 #-----
225 #!      @Description the functions returns a list of all tupels which
226 #!      can be used to perform the wanderinghole
227 #!      @Arguments a simplicial surface
228 #!      @Returns a list of tupels where the first entry is a face and
229 #!      the second is a edge
230 H:=function(S)
231     local K,g,f,M,F,i,j,VOF,VOE,Facesofedge,Edgesofface;
232     K:=[];

```

```

233     M:=[];
234     #for each face in S we collect the edges that aren't incident
235     #to that face but to a neighbour face and share exactly one
236     #vertex with the face
237     for F in Faces(S) do
238         VOF:=VerticesOfFace(S,F);
239         for f in Edges(S) do
240             VOE:=VerticesOfEdge(S,f);
241             if VOE[1] in VOF and not(VOE[2] in VOF) then
242                 Add(K,[F,f]);
243             fi;
244             if VOE[2] in VOF and not(VOE[1] in VOF) then
245                 Add(K,[F,f]);
246             fi;
247         od;
248     od;
249     for g in K do
250         Facesofedge:=FacesOfEdge(S,g[2]);
251         Edgesofface:=EdgesOfFace(S,g[1]);
252         for i in [1,2,3] do
253             for j in [1,2] do
254
255                 if Facesofedge[j] in
256                    FacesOfEdge(S,Edgesofface[i]) then
257                     Add(M,g);
258                 fi;
259             od;
260         od;
261     od;
262     return Set( M);
263 end;
264
265 #!     @Description checks whether simplicial surface has no
266 #!     vertices with face degree 2 or 3
267 #!     @Arguments a simplicial surfa
268 #!     @Returns true if there is a vertex with facedegree 2 or 3
269 HasNoWaist:=function(S)
270     local FaceDegrees;
271     FaceDegrees:=FaceDegreesOfVertices(S);

```

```

272     if 2 in FaceDegrees then or 3 in FaceDegrees then
273         return false;
274     fi;
275     return true;
276 end;
277
278 #! @Description the function creates a simplicial surface with
279 #! an 2-Waist by adding 2 faces to a given surface and using the
280 #! mender- and cutter-operator
281 #! @Arguments a simplicial surface and an edge
282 #! Returns simplicial surface with 2-waist
283
284 CreatingTwoWaist:=function(S,f)
285     local g,VerticesOfEdges,EdgesOfFaces,OpenBag;
286     #define surface OpenBag
287     VerticesOfEdges:=[[2,3],[1,3],[1,2],[1,2]];
288     EdgesOfFaces:=[[1,2,3],[1,2,4]];
289     S:=CraterCut(S,f);
290     OpenBag:=SimplicialSurfaceByDownwardIncidence
291         (VerticesOfEdges, EdgesOfFaces);
292     #creating surface with 2-waist
293     S:=DisjointUnion(S,OpenBag,Length(Vertices(S)) [1]);
294     S:=SplitMend(S,SplitMendableFlagPairs(S) [1]);
295     S:=CraterMend(S,CraterMendableEdgePairs(S) [2]);
296     return S;
297 end;
298
299 #! Description the function gets a simplicial surface with n
300 #! faces as argument and creates a simplicial surface with n+2
301 #! faces and a 3-waist
302 #! @Arguments simplicial and a face
303 #! @Returns a simplicial surface with 3-waist
304
305 CreatingThreeWaist:=function(S,F)
306     local Hut;
307     #define the simplicial surface Hut
308     Hut:=RemoveFace(Tetrahedron(),1);
309
310     #remove face F from the surface S

```

```

311     S:=RemoveFace(S,F);
312
313     #creating surface with 3-waist
314     S:=DisjointUnion(S,Hut,Length(Vertices(S)) [1]);
315     S:=SplitMend(S,SplitMendableFlagPairs(S) [1]);
316     S:=RipMend(S,RipMendableEdgePairs(S) [2]);
317     S:=CraterMend(S,CraterMendableEdgePairs(S) [2]);
318     return S;
319 end;
320
321
322
323 #-----
324 #!      Profiling
325 TimingTest:=function()
326     local S,R;
327     S:=AllSimplicialSurfaces(10,EulerCharacteristic,2) [1];
328     R:=Runtime();
329     WanderingIterativ(S);
330     Print("10: ",Runtime()-R,"\n");
331
332     S:=AllSimplicialSurfaces(12,EulerCharacteristic, 2) [1];
333
334     R:=Runtime();
335     WanderingIterativ(S);
336     Print("12: ",Runtime()-R,"\n");
337
338 end;
339 #-----List of Functions-----
340
341 ListOfFunctions:=[Wandering,NeighbourFaceByEdge,VerticesOfEdge,
342     OtherEdgeOfVertexInFace,OtherVertexOfEdge,Append,
343     SimplicialSurfaceByDownwardIncidence,Filtered,
344     EdgesOfFace,VerticesOfEdge,Add,Faces,WanderingIterativ,
345     CanonicalRepresentativeOfPolygonalSurface2];
346

```



## Literatur

- [1] Wilhelm Plesken et al. *Combinatorial Simplicial Surfaces*. in preparation.
- [2] Herbert Fleischner. *Discrete Mathematics*, chapter The uniquely embeddable Planar Graphs. Volume 4 edition, 1972.